



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

# Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση και αξιολόγηση PISA

Αθήνα, 2019



# **Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση και αξιολόγηση PISA**

**ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΟΜΑΔΑ**

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ:

**Φέρμελη Γεωργία**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ

ΕΚΠΟΝΗΣΗ

*Μέλη της Μονάδας  
Φυσικών Επιστημών,  
Τεχνολογίας και  
Μαθηματικών του ΙΕΠ:*

**Μαυρογιάννης Νικόλαος**, Σύμβουλος Α΄ ΙΕΠ

**Στράντζαλος Αθανάσιος**, Σύμβουλος Β΄ ΙΕΠ

**Ελισάβετ Αναστασοπούλου**, Αποσπ. Εκπαιδευτικός στο ΙΕΠ

*Η κα Παπαστράτου Πηνελόπη και ο κος Χριστόπουλος Πέτρος-αποσπασμένοι εκπαιδευτικοί στο ΙΕΠ και μέλη της ομάδας του PISA στο ΙΕΠ παρείχαν -σε συνεργασία με τη συντονίστρια της έρευνας- τα απαραίτητα στοιχεία και διευκολύνσεις σε στοιχεία του PISA που απαιτήθηκαν για την εκπόνηση της παρούσης έρευνας.*

ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΑΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ PISA ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(ΠΡΑΞΗ 1/05-01-2018 ΤΟΥ ΔΣ ΤΟΥ ΙΕΠ)

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Γεράσιμος Κουζέλης

Πρόεδρος του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Συντονίστρια Μονάδας Φυσικών Επιστημών, Τεχνολογίας και Μαθηματικών

Γεωργία Φέρμελη

Σύμβουλος Α΄ του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής



Το παρόν εκπονήθηκε αμισθί, με ευθύνη της Μονάδας Φυσικών Επιστημών, Τεχνολογίας και Μαθηματικών του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής, στο πλαίσιο της ανωτέρω έρευνας.

## Πίνακας περιεχομένων

Σκοπός της έρευνας .....	1
Υποθέσεις και αναμενόμενα.....	2
Οι στόχοι των ΑΠΣ-ΔΕΠΣ και οι στόχοι του PISA.....	3
Το πρόβλημα στα Προγράμματα Σπουδών και στην αξιολόγηση PISA.....	5
Τα διδακτικά βιβλία .....	8
Η διδακτική πράξη .....	10
Το πρόβλημα στις τελικές εξετάσεις του Γυμνασίου.....	10
Ανάλυση της θεματικής στην αξιολόγηση PISA, σε συνδυασμό και με τις απαντήσεις των μαθητών/μαθητριών από τα ελληνικά σχολεία .....	12
Παρουσίαση και συνοπτική καταγραφή δεδομένων ανά επιλεγμένο θέμα του PISA 2012 ..	13
Επιλεγμένο Θέμα 1 .....	13
Επιλεγμένο Θέμα 2 .....	13
Επιλεγμένο Θέμα 3 .....	14
Επιλεγμένο Θέμα 4 .....	15
Επιλεγμένο Θέμα 5 .....	16
Επιλεγμένο Θέμα 6 .....	16
Επιλεγμένο Θέμα 7 .....	17
Επιλεγμένο Θέμα 8 .....	18
Επιλεγμένο Θέμα 9 .....	18
Αποτίμηση.....	20
Προτάσεις .....	23
Αναφορές.....	25
ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ 1 .....	27



## Σκοπός της έρευνας

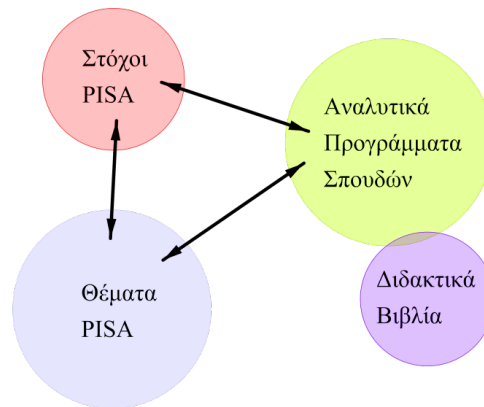
Με την υπ' αριθμ. πρωτ. 1/05-01-2018 Πράξη του, το Διοικητικό Συμβούλιο του Ι.Ε.Π. ενέκρινε τη διεξαγωγή έρευνας, στο πλαίσιο του προγράμματος PISA για τις Φυσικές Επιστήμες και τα Μαθηματικά.

Σε ό,τι αφορά στα Μαθηματικά, η πρόταση αφορούσε:

1. Στην συνεξέταση των στόχων της έρευνας PISA, των θεμάτων που τίθενται και των στόχων των υπαρχόντων Προγραμμάτων Σπουδών (ΠΣ) και Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (ΑΠΣ), όπως εφαρμόζονται (σε συνδυασμό με τα διδακτικά βιβλία που τα υποστηρίζουν, αλλά και με τις μεθοδολογικές παρακαταθήκες που οι ίδιοι/ες οι μαθητές/μαθήτριες δηλώνουν, στον διαγωνισμό PISA 2012, όπου και τέθηκαν τέτοια ερωτήματα), με έμφαση στη σύγκριση του Πλαισίου αξιολόγησης του Προγράμματος PISA με τους στόχους του ΠΣ/ΑΠΣ, ιδίως ως προς το τι μπορούν να κάνουν οι μαθητές/μαθήτριες με αυτά που μαθαίνουν:
  - A) στη μεταφορά και διαχείριση γνώσης, μεθόδων και δεξιοτήτων σε μη οικεία (για την τάξη και τη διδασκαλία) πλαίσια, και
  - B) σε ό,τι αφορά στη σύνδεση του κόσμου της εμπειρίας με το μαθηματικό περιεχόμενο.
2. Στην ανίχνευση των γνωστικών απαιτήσεων των θεμάτων (Cognitive demands of Tasks ή «επίκληση γραμματισμών») σε συσχετισμό με τις απαντήσεις των μαθητών/μαθητριών. Ανάλογα με τα ευρήματα, υπήρχε η πρόβλεψη για ενδεχόμενη αξιοποίηση και άλλων ποσοτικών στοιχείων της έρευνας, ειδικά του 2012 (ενδεικτικά: οι απόψεις των μαθητών/μαθητριών για τη μαθησιακή διαδικασία, το ενδιαφέρον για το σχολείο, η αποτίμηση από τους/τις μαθητές/μαθήτριες των μαθησιακών συνθηκών που προσφέρει η θεσμοθετημένη εκπαίδευση).

## Υποθέσεις και αναμενόμενα

Βασική υπόθεση της έρευνας είναι ότι οι στόχοι του PISA και τα δεδομένα που προκύπτουν από την εφαρμογή της έρευνας PISA μπορούν να δώσουν πληροφορίες και ενδεχομένως κατευθύνσεις χρήσιμες για την αποτίμηση της αποτελεσματικότητας **συγκεκριμένων επιλογών** των ΠΣ και ΑΠΣ (συνεπώς: επιλογών περιεχομένου του ΠΣ και διδακτικών εργαλείων και οδηγιών, αλλά και διαχείρισης της ύλης), καθώς και για κριτική επεξεργασία **επιλογών του PISA**, που θα μπορούσαν να ενταχθούν σε έναν διάλογο<sup>1</sup> και μια διερευνητική διεργασία για την αναδιαμόρφωση της εκπαιδευτικής πολιτικής.



Εργαλεία έρευνας και μέθοδος: λεπτομερής εξέταση των θεμάτων PISA 2012 (ως χρονιάς ειδικού βάρους στα Μαθηματικά, αλλά και με δεδομένο ότι οι απαντήσεις των μαθητών/μαθητριών δόθηκαν επί χαρτιού, παρέχοντάς μας τη δυνατότητα να μελετήσουμε τυχόν καταγραφές τους), αναγνώριση και καταγραφή των εμπλεκόμενων γραμματισμών / cognitive demands, καταγραφή και έλεγχος διατυπώσεων, αναγνώριση αντίστοιχου περιεχομένου στο ΑΠΣ, επιλογή, κριτική αποτίμηση και αναγνώριση προστιθέμενης αξίας σε τυχόν ανακλύπτουσες προτάσεις.

Μέσω των ανωτέρω, προέκυψε μια επιλογή θεμάτων προς περαιτέρω διερεύνηση, με όρους ειδικών χαρακτηριστικών τους και χωρίς – κατά την επιλογή – να είναι γνωστές οι αντίστοιχες επιδόσεις των μαθητών και μαθητριών από την Ελλάδα.

### **Ανάλυση απαντήσεων μαθητών και μαθητριών από την Ελλάδα και συνεξέταση με τα προηγούμενα.**

Εργαλεία έρευνας και μέθοδος: λεπτομερής εξέταση τυχαιοποιημένου δείγματος γραπτών των διαγωνισμών PISA 2012, αναγνώριση και καταγραφή των επικαλούμενων / εμπλεκόμενων από τους/τις μαθητές/μαθήτριες γραμματισμών/cognitive demands, διερεύνηση και αποτύπωση προβληματικών διατυπώσεων, αντιστοιχίσεις που γίνονται

<sup>1</sup> Σημειώνεται ότι σχετικά έχει προηγηθεί η έρευνα (Σοφianoπούλου 2011)



(ρητά ή υπόρρητα) στο περιεχόμενου του ΑΠΣ, επιλογή, κριτική αποτίμηση και αναγνώριση προστιθέμενης αξίας σε τυχόν ανακύπτουσες προτάσεις.

## Οι στόχοι των ΑΠΣ-ΔΕΠΣ και οι στόχοι του PISA

Η αξιολόγηση PISA κατά κύριο λόγο αφορά γνώσεις και ικανότητες που αποκτήθηκαν στο Γυμνάσιο. Η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο στηρίζεται : α) στο Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Σπουδών και β) στα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών τα οποία εκπονήθηκαν το 2002.

Σύμφωνα με αυτά<sup>2</sup> οι βασικοί στόχοι είναι οι ακόλουθοι:

1. Η απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.
2. Η καλλιέργεια της Μαθηματικής Γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας αλλά και περιγραφής πραγματικών φαινομένων και καταστάσεων.
3. Η σταδιακή κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών της δομής των Μαθηματικών.
4. Η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία.
5. Η σταδιακή ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων και αντιμετώπιση πραγματικών καταστάσεων.
6. Η ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών από την αρχαιότητα ως της μέρες μας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικοοικονομικές επιστήμες.
7. Η ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης που εκφράζεται μέσα από τη ραγδαία ανάπτυξή της, και της σημασίας της ως απαραίτητου εργαλείου όλων των ανθρώπινων δραστηριοτήτων.
8. Η καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά, χωρίς την οποία η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων αποβαίνει εξαιρετικά δυσχερής.

Η αξιολόγηση PISA 2012 (αλλά και 2015) αποσκοπεί:

...στη μέτρηση της ικανότητας των ατόμων να προσαρμόζουν, να εφαρμόζουν και να διερμηνεύουν τα Μαθηματικά σε μία ποικιλία συνθηκών-συμφραζομένων. Αυτή συμπεριλαμβάνει τη μαθηματική αιτιολόγηση και τη χρήση μαθηματικών εννοιών διαδικασιών, αποτελεσμάτων και εργαλείων για την περιγραφή και την πρόβλεψη φαινομένων. Η ικανότητα αυτή βοηθάει τα άτομα στην αναγνώριση του ρόλου που

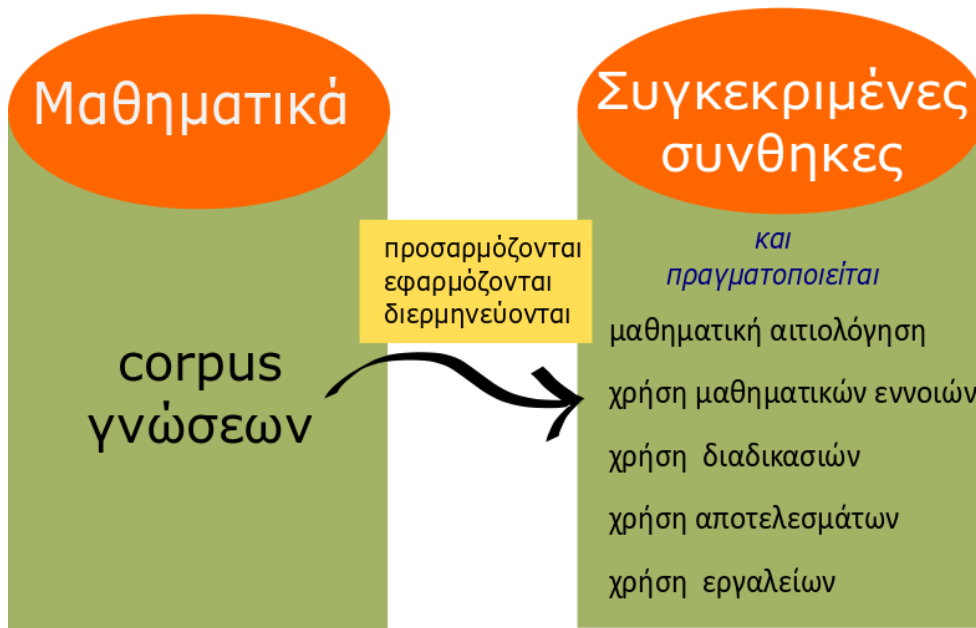
<sup>2</sup> ΥΑ 21072β/Γ2 ΦΕΚ 304/13-3-2003

<sup>3</sup> OECD PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do Student Performance in Mathematics,

παίζουν τα Μαθηματικά στον κόσμο για να προβαίνουμε σε καλά θεμελιωμένες αξιολογήσεις και αποφάσεις που είναι απαραίτητες σε εποικοδομητικούς, ενεργούς και στοχαστικούς πολίτες<sup>3</sup>.

Υπάρχουν κάποιες διαφορές μεταξύ των στόχων PISA και των στόχων ΑΠΠΣ-ΔΕΠΣ.

1. Οι στόχοι PISA αναφέρονται σε ένα νοητό και υπόρητο corpus μαθηματικής γνώσης που είναι αντιμέτωπο με ποικίλα συμφραζόμενα και το οποίο πρέπει να προσαρμοστεί -

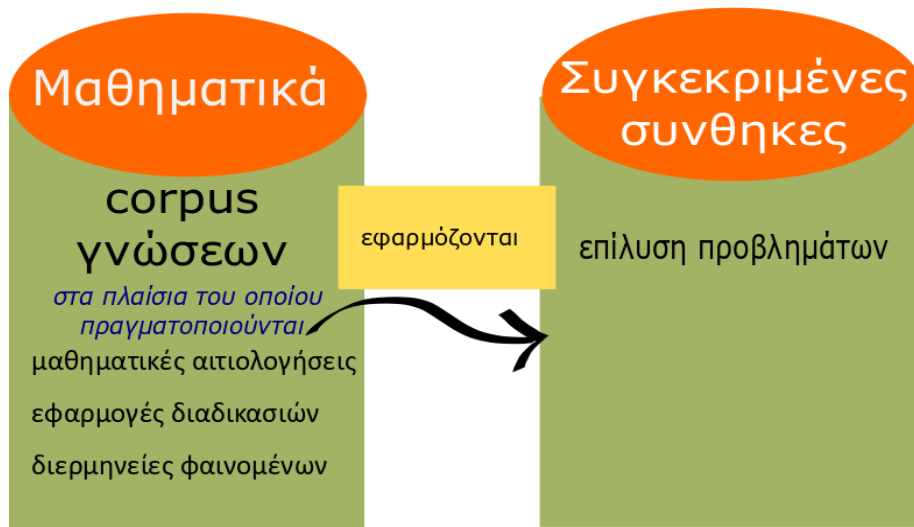


0-1 Τα Μαθηματικά στο PISA

εφαρμοστεί - διερμηνευθεί προκειμένου να επιτευχθούν. Είναι περισσότερο εργαλειακοί (instrumental) και επικεντρώνονται αφενός στην επίλυση προβλημάτων και αφετέρου στην εν γένει πολιτειότητα.

2. Στους στόχους ΑΠΠΣ-ΔΕΠΣ δίνεται ξεχωριστή έμφαση στην κατανόηση της δομής των Μαθηματικών και της αρχιτεκτονικής τους. Θεωρητικά τουλάχιστον εκφράζεται η τάση δόμησης των Μαθηματικών σε εσωτερικούς εννοιολογικούς άξονες σε συνδυασμό με τους οποίους θα επιτελούνται σημαντικές λειτουργίες όπως αιτιολογήσεις κ.ά. Οι εφαρμογές των Μαθηματικών εμφανίζονται ως επακόλουθα και όχι ως περιοχές εντός των οποίων γίνονται Μαθηματικά.

<sup>3</sup> OECD PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do Student Performance in Mathematics, Reading and Science Volume I, 2013 σελίδα 37.



0-2 Τα Μαθηματικά στο ΑΠΠΣ-ΔΕΠΣ

Φυσικά, η προηγούμενη σύγκριση γίνεται σε επίπεδο «προγραμματικών δηλώσεων» και είναι απαραίτητο να γίνουν συγκρίσεις πλησίον της εκπαιδευτικής διαδικασίας και της αξιολόγησης PISA.

### Το πρόβλημα στα Προγράμματα Σπουδών και στην αξιολόγηση PISA

Σε επίπεδο στοχοθεσίας υπάρχουν σημαντικές αποκλίσεις. Το πρόβλημα στα Προγράμματα Σπουδών εμφανίζεται ως εφαρμογή συγκεκριμένης θεωρίας. Δηλαδή η πλαισίωση του προβλήματος είναι ένα συγκεκριμένο κομμάτι της ύλης.

Αν δεχτούμε, επομένως, ότι η διδασκαλία των Μαθηματικών δεν αφορά μόνο γνώσεις και κατάκτηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου ικανοτήτων, αλλά περιλαμβάνει διαδικασίες μάθησης που καλύπτουν τις διαστάσεις που έχουμε ήδη περιγράψει, οι στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους δραστηριοτήτων, παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών.

Η επιλογή των δραστηριοτήτων γίνεται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια που αναφέρονται στους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και η διατύπωσή τους επιτρέπει την εμπλοκή, εφόσον είναι δυνατόν, του συνόλου των μαθητών της τάξης.

Για τους/τις μαθητές/μαθήτριες αυτό σημαίνει ότι έχουν την ευκαιρία να σκεφτούν και να ενεργήσουν στο δικό τους προσωπικό επίπεδο και να διατυπώσουν τους δικούς τους επιμέρους στόχους.

Για τον δάσκαλο αυτό σημαίνει υψηλό βαθμό αυτενέργειας και πρωτοβουλίας. Πρέπει να είναι ικανός να διακρίνει πίσω από τη διατύπωση μιας δραστηριότητας τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης και να τους προσαρμόσει στις ιδιαιτερότητες της τάξης του.

Αντίθετα, στην αξιολόγηση PISA η πλαisiώση του προβλήματος είναι μια πραγματική κατάσταση και οι συνδέσεις με τη «θεωρία» είναι μη εμφανείς και ασθενείς:

Τα προβλήματα είναι καταστάσεις χωρίς προφανή λύση και η επίλυση προβλημάτων απαιτεί σκέψη και μάθηση στην πράξη<sup>4</sup>.

Στην αξιολόγηση PISA υπάρχει σκοπούμενη προσπάθεια αποσύνδεσης των προβλημάτων από τα προγράμματα:

Κατά τη συμπερίληψη αυθεντικών σεναρίων που σχετίζονται με προβλήματα της καθημερινής ζωής η αξιολόγηση PISA 2012 αποφεύγει όσο γίνεται περισσότερο την ανάγκη χρήσης συγκεκριμένης γνώσης που εκπορεύεται από το πρόγραμμα σπουδών<sup>5</sup>.

Στο ίδιο κείμενο επισημαίνεται ότι η επίλυση προβλήματος δεν επισυμβαίνει μόνο στο σχολείο. Οι μαθητές/μαθήτριες λύνουν προβλήματα και για διάφορους λόγους και εκτός σχολείου. Ωστόσο μία εκπαίδευση υψηλής ποιότητας μπορεί αναμφίβολα να βελτιώσει τις δεξιότητες επίλυσης προάγοντας, μεταξύ άλλων:

- την αυτοπειθαρχημένη γνώση και μεταγνώση, και ιδίως
- τη γνώση για το πότε και που χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες στρατηγικές.

Η δε ικανότητα επίλυσης προβλημάτων στο ίδιο κείμενο<sup>6</sup> ορίζεται μέσω γνωστικών ικανοτήτων αλλά και θετικών στάσεων:

Ο PISA 2012 ορίζει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ...ως μια ικανότητα των ατόμων να εμπλακούν στη γνωστική διαδικασία της κατανόησης και επίλυσης προβληματικών καταστάσεων όπου η μέθοδος επίλυσης δεν είναι εμφανής με άμεσο

---

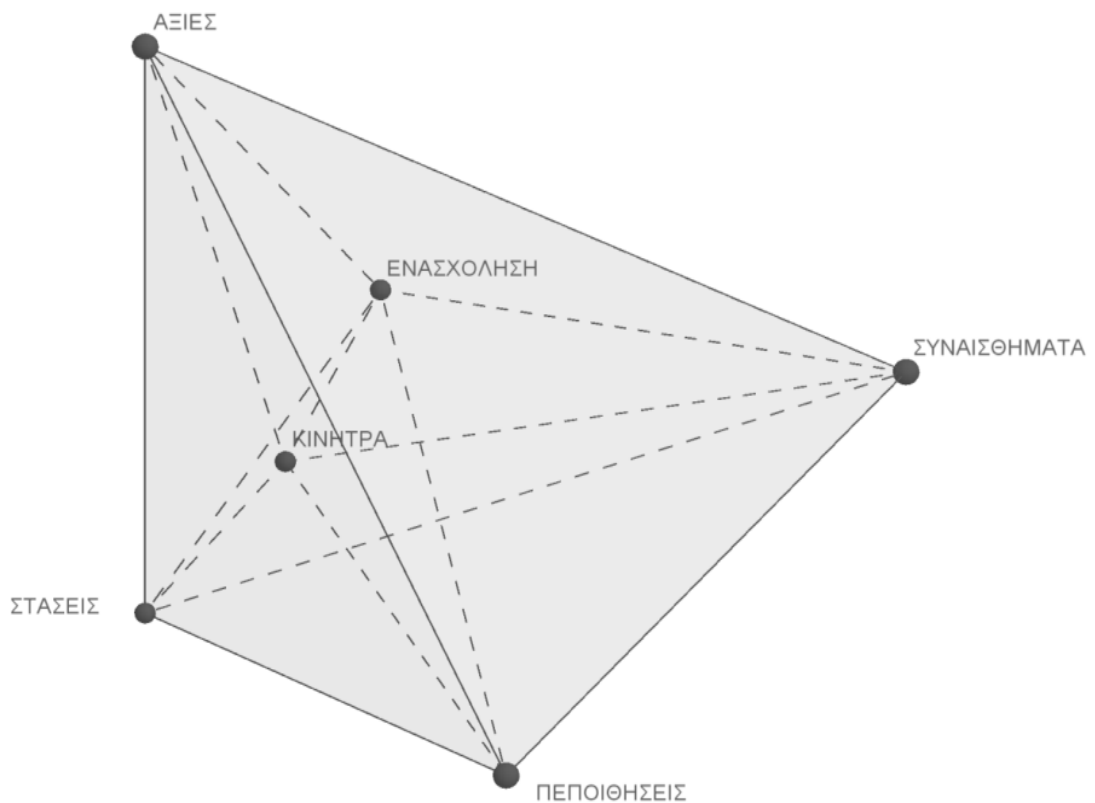
<sup>4</sup> (OECD, PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V) 2014) σελ. 26

<sup>5</sup> (OECD, PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do. Student Performance in Mathematics, Reading and Science. Volume I 2014) σελ. 29.

<sup>6</sup> (OECD, PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V) 2014) σελ. 30.

τρόπο. Περιλαμβάνει τη θέληση εμπλοκής σε καταστάσεις προκειμένου να αξιοποιηθεί το δυναμικό τους ως επινοητικών και στοχαστικών πολιτών<sup>7</sup>.

Σύμφωνα με το παραπάνω η «επιλυτική ικανότητα» είναι μια σύνθετη ικανότητα η οποία έχει διαμορφωθεί από την προγενέστερη πορεία στο σχολείο αλλά και έξω από αυτό. Η απόδοση ενός μεμονωμένου μαθητή στην αξιολόγηση PISA δεν αποτελεί ένα στιγμιαίο γεγονός αλλά επενέργεια ενός πλέγματος ατομικών ιδιοτήτων (πέραν των καθαυτών γνωστικών). Ένα μοντέλο του πλέγματος αυτού προκύπτει από ζεύξη<sup>8</sup> των μοντέλων που έχουν προτείνει οι Valerie & Goldin<sup>9</sup> και Attard<sup>10</sup>:



Η ατομική απόδοση στην αξιολόγηση PISA, λόγω του μη τετριμμένου χαρακτήρα των προβλημάτων, προϋποθέτει σημαντική ατομική προσπάθεια. Όπως εκτιμάται από τον Ε. Καπετανά<sup>11</sup>, οι μαθητές/μαθήτριες που προσπαθούν πολύ για να λύσουν μια άσκηση ή ένα πρόβλημα, έχουν, μεταξύ άλλων, τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

<sup>7</sup> (OECD, PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V) 2014) σελ. 30.

<sup>8</sup> (Σπηλίδης 2018)

<sup>9</sup> (Valerie & Goldin n.d.)

<sup>10</sup> (Attard n.d.)

<sup>11</sup> (Καπετανάς 2016)

- Πιστεύουν στη χρησιμότητα των αποδείξεων και γενικά των Μαθηματικών.
- Αγαπούν τα Μαθηματικά.
- Δεν μελετούν τις αποδείξεις των θεωρημάτων, ωθούμενοι από εξωτερικά κίνητρα.
- Προσπαθούν να μελετούν τα Μαθηματικά με τρόπο που οδηγεί στην κατανόηση και τον αναστοχασμό.
- Έχουν υψηλή επίδοση και απόδοση στα Μαθηματικά.
- Έχουν μεγάλη αυτοεκτίμηση και απολαμβάνουν ή επιδιώκουν ετεροεκτίμηση σε ό,τι αφορά στα (σχολικά) Μαθηματικά.
- Δεν φοβούνται τα Μαθηματικά.

Άλλα χαρακτηριστικά που συνδέονται με την επιλυτική ικανότητα υπάρχουν στην επισκόπηση ξένης βιβλιογραφίας του (Μάρκου 2017).

### Τα διδακτικά βιβλία

Οι μαθητές και οι μαθήτριες από τα ελληνικά σχολεία που μετέχουν στη αξιολόγηση PISA έχουν λάβει μαθηματική εκπαίδευση που στηρίζεται μεν στα Προγράμματα Σπουδών, αλλά προσεγγίζεται μέσω των διδακτικών βιβλίων<sup>12</sup>, αρχικά του Δημοτικού και κατόπιν, του Γυμνασίου. Δεδομένης της χρονικής εγγύτητας της φοίτησης στο Γυμνάσιο και της χρονικής στιγμής που διενεργείται η αξιολόγηση PISA, και δεδομένου ότι τα περιεχόμενα των βιβλίων του Γυμνασίου επαναλαμβάνουν και γνώσεις του Δημοτικού, μπορούμε να θεωρήσουμε τα βιβλία του Γυμνασίου ως σημείο αναφοράς. Πρόκειται για τα βιβλία (Βανδουλάκης 2007 κα), (Βλάμος 2007 κ.ε.), (Αργυράκης 2007 κ.ε.).

Τα βιβλία αυτά έχουν συνολική έκταση περίπου 750 σελίδων και περιέχουν 25 κεφάλαια εκ των οποίων τα 16 πραγματεύονται τα αντικείμενα Άλγεβρα, Στατιστική, Πιθανότητες και τα 9 Γεωμετρία.

Κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει, εκτός από το θεωρητικό μέρος, δραστηριότητες, παραδείγματα-εφαρμογές, ασκήσεις-προβλήματα και ιστορικά σημειώματα.

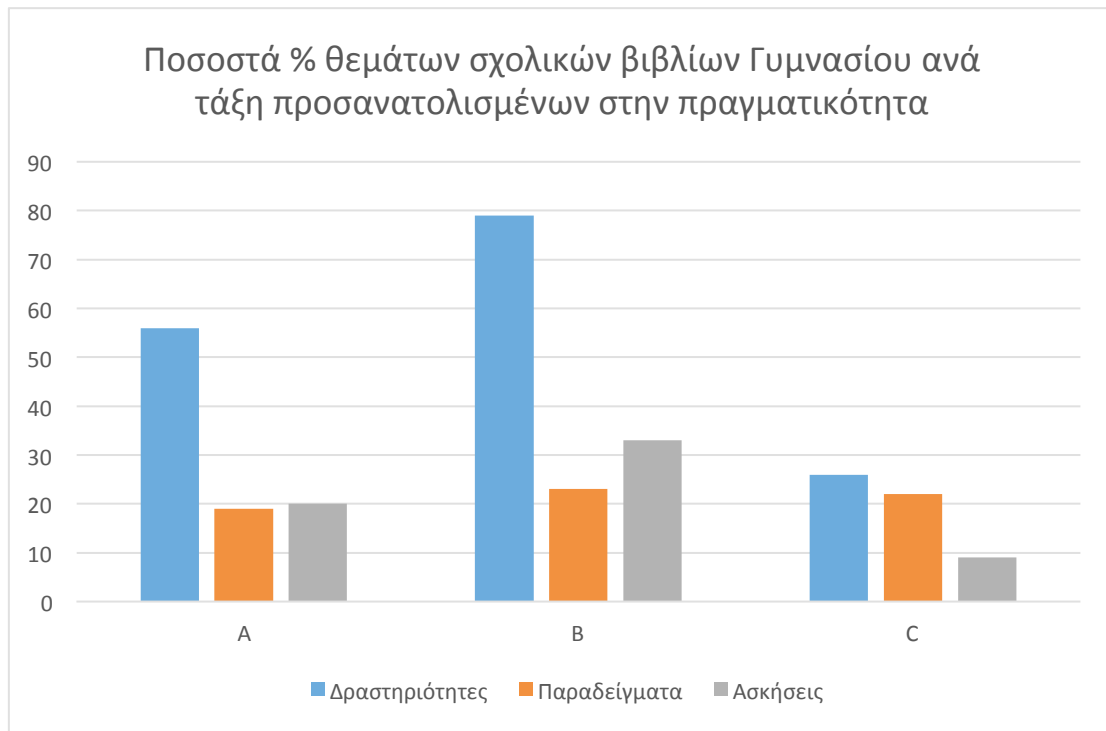
Τα βιβλία δίνουν μια πρώτη «δυναμική» εικόνα των Μαθηματικών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/μαθήτριες στο σχολείο. Επειδή στην αξιολόγηση PISA η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων που σχετίζονται με τη ζωή αποτελεί το *sine qua non*, έχει σημασία να εξεταστεί η υπηρετήση αυτού του στόχου από τα σχολικά βιβλία.

---

<sup>12</sup> Για σχετική ανάλυση για τις φυσικές επιστήμες βλ. (Hatzinikita 2007)

Μία εξέταση των σχολικών βιβλίων αποδίδει τα στοιχεία του επόμενου πίνακα, όπου με έντονους χαρακτήρες είναι σημειωμένο το πλήθος κάθε κατηγορίας που αντιστοιχεί σε θέματα τα οποία κατά κάποιο τρόπο είναι προσανατολισμένα στην «πραγματικότητα»:

Τάξη	Δραστηριότητες	Παραδείγματα-Εφαρμογές	Ασκήσεις-Προβλήματα
Α	98	156	447
	<b>55 (56%)</b>	<b>29 (19%)</b>	<b>89 (20%)</b>
Β	42	124	348
	<b>33 (79%)</b>	<b>28 (23%)</b>	<b>114 (33%)</b>
Γ	30	114	949
	<b>8 (27%)</b>	<b>25 (22%)</b>	<b>87 (9%)</b>
Σύνολο	170	394	1744
	<b>96 (56%)</b>	<b>82 (21%)</b>	<b>290 (17%)</b>



Ωστόσο δεν είναι όλες οι ασκήσεις-προβλήματα που αναφέρονται στην πραγματικότητα ίδιες. Σύμφωνα με την ταξινόμηση των Verschaffel, Greer & De Conte<sup>13</sup>, τα λεκτικά προβλήματα (πρόκειται για τα υπό εξέταση προβλήματα) χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Η

<sup>13</sup> (Καγκουρά 2008) σελ. 9

πρώτη περιλαμβάνει τα συνηθισμένα (standard) προβλήματα που λύνονται από τους/τις μαθητές/μαθήτριες χωρίς ιδιαίτερες δυσκολίες με συνδυασμό αριθμητικών πράξεων. Η δεύτερη απαρτίζεται από τα ασυνήθιστα ή «προβληματικά» (problematic) προβλήματα, όπου το μαθηματικό μοντέλο δεν είναι εμφανές και αποκαλύπτεται όταν οι λύτες εξετάσουν το πλαίσιο του προβλήματος. Τα προβλήματα των σχολικών βιβλίων ανήκουν στην πρώτη κατηγορία ενώ τα προβλήματα του PISA, εμπρόθετα, στη δεύτερη. Δηλαδή, το διδακτικό συμβόλαιο<sup>14</sup> που «επιτρέπουν» τα διδακτικά βιβλία δεν περιλαμβάνει «προβληματικά» προβλήματα όπως της αξιολόγησης PISA.

## Η διδακτική πράξη

Ανεξάρτητα από τις εμπρόθετες ενέργειες σε επίπεδο εκπαιδευτικού σχεδιασμού, προγραμμάτων κ.τ.λ., τα αιτήματα και τα προϊόντα της μάθησης επιτυγχάνονται στο επίπεδο της διδακτικής πράξης.

Εκπαιδευτικός Σχεδιασμός	Ενώ σε επίπεδο σχεδιασμού, προγραμμάτων και βιβλίων τα στοιχεία είναι διαθέσιμα, δεν συμβαίνει το ίδιο και για το κρίσιμο στάδιο της διδακτικής πράξης. Για αυτήν δεν φαίνεται να υπάρχουν στοιχεία που να συνδέονται άμεσα με τις υιοθετούμενες διδακτικές πρακτικές για την καλλιέργεια της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων. Ενώ είναι διαθέσιμες αρκετές ελληνικές μελέτες πειραματισμού, σχετικές με τη διδασκαλία προβλημάτων, δεν φαίνεται να συμβαίνει το ίδιο με μελέτες για τις πραγματικές διδακτικές πρακτικές. Για τις ιεραρχήσεις που γίνονται μέσα στην τάξη, στην κατ' οίκον εργασία ή και στην εξωσχολική διδασκαλία δεν κατέστη δυνατόν να βρεθούν στοιχεία.
Προγράμματα Σπουδών	
Διδακτικά Βιβλία	
Διδακτική Πράξη	

Θεωρούμε ότι το θέμα αυτό χρειάζεται ιδιαίτερη διερεύνηση.

## Το πρόβλημα στις τελικές εξετάσεις του Γυμνασίου

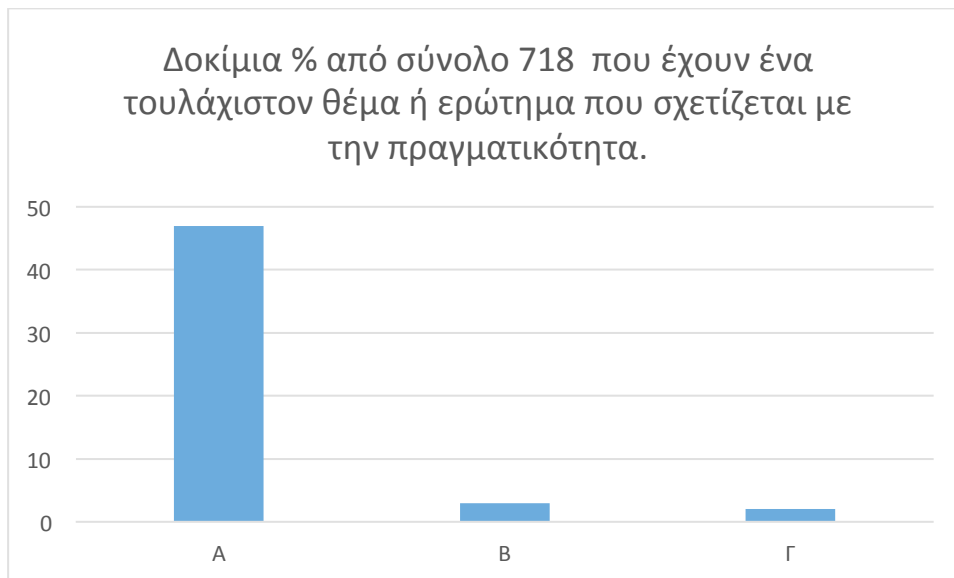
Ωστόσο, ένας δείκτης για την σπουδαιότητα που αποδίδεται στην ενασχόληση με προβλήματα σχετιζόμενα με την «πραγματικότητα» είναι η εμφάνιση τους σε τελικές ή/και απολυτήριες εξετάσεις. Από επισκόπηση 718 εξεταστικών δοκιμίων εξετάσεων Γυμνασίων της περιοχής ευθύνης τους, που συνέλεξαν οι σχολικοί σύμβουλοι Ν. Βασιλάς, Ι.

<sup>14</sup> (Brousseau 2002) κεφ. 5



Καραγιάννης, Κ. Κωνσταντόπουλος Κ. Μπουραζάνας<sup>15</sup> και καλύπτουν την τελευταία δεκαετία, προκύπτει ο επόμενος πίνακας, όπου με έντονους χαρακτήρες εμφανίζεται το πλήθος των εξεταστικών δοκιμών που περιέχουν τουλάχιστον ένα θέμα ή ερώτημα θέματος που σχετίζεται με την «πραγματικότητα».

Τάξη	Πλήθος εξεταστικών δοκιμών
Α	249
	<b>117 (47%)</b>
Β	237
	<b>6 (3%)</b>
Γ	232
	<b>5 (2%)</b>



Φαίνεται ότι, στο συγκεκριμένο δείγμα, η συμπερίληψη προβλημάτων στο τελικό εξεταστικό δοκίμιο βαίνει μειούμενη στις τάξεις του Γυμνασίου. Μάλιστα, βρέθηκε και μικρός αριθμός θεμάτων που είχαν τη δομή θέματος πανελληνίων εξετάσεων.

<sup>15</sup> Τα θέματα διατίθενται σε διάφορες ιστοσελίδες. Ανακτήθηκαν την 20-09-2018 από το ιστολόγιο <https://parmenides51.blogspot.com/>.

## Ανάλυση της θεματικής στην αξιολόγηση PISA, σε συνδυασμό και με τις απαντήσεις των μαθητών/μαθητριών από τα ελληνικά σχολεία

Για να εξεταστεί η σχέση των θεμάτων της αξιολόγησης PISA με τα περιεχόμενα των διδακτικών βιβλίων, επελέγη για ανάλυση ένα δείγμα εννέα (9) θεμάτων από τη διεξαγωγή του PISA 2012 και μελετήθηκε το περιεχόμενό τους, καθώς και το περιεχόμενο των απαντήσεων που έδωσαν μαθητές και μαθήτριες από ελληνικά σχολεία (μέσω τυχαίας δειγματοληψίας). Στην επόμενη ενότητα, η αναφορά στα θέματα γίνεται με τη σειρά έκθεσής τους στο Προσάρτημα 2 και στις επί μέρους ερωτήσεις ως προς την σειρά παράθεσής τους ανά θέμα στα δοκίμια εξέτασης.

Α) Κάθε θέμα αξιολογήθηκε από την ερευνητική ομάδα ως προς τη συνάφεια του με τα περιεχόμενα των σχολικών βιβλίων σε κλίμακα 0, 1, 2 (μικρή συνάφεια, μέτρια και μεγάλη).

Β) Για κάθε θέμα αναλύθηκαν οι απαντήσεις που δόθηκαν, σε ένα δείγμα γραπτών που ανέρχεται στο 10% του συνολικού αριθμού. Υπολογίστηκε ο βαθμός απόδοσης<sup>16</sup> με βάση τη βαθμολογία σε εθνική κλίμακα.

Επισημαίνεται ότι δεν κατέστη δυνατόν να έχουμε τον πλήρη οδηγό βαθμολόγησης που είχε χρησιμοποιηθεί από τους βαθμολογητές του PISA 2012, οπότε, εκτός του μερικού οδηγού, που μας διατέθηκε από το Γραφείο PISA του Ι.Ε.Π., χρειάστηκε να εκτιμήσουμε τις σχετικές διαβαθμίσεις.

Γ) Σε κάθε θέμα αντιστοιχίστηκε ο δείκτης εμπλοκής των μαθητών/μαθητριών που είναι το επί τοις % ποσοστό εκείνων που απάντησαν (ορθά ή εσφαλμένα) το θέμα.

Η εξέταση των θεμάτων σε συνδυασμό με τις απαντήσεις, απέδωσαν τις παρατηρήσεις που ακολουθούν, οι οποίες, υπενθυμίζεται, είναι κατανεμημένες ανά επιλεγμένο θέμα (πρβλ. Προσάρτημα 2) και με καταγραφή των ερωτήσεων που επιλέξαμε για κάθε θέμα ως προς την σειρά με την οποία παρατίθενται εκεί:

<sup>16</sup> Ο βαθμός απόδοσης υπολογίστηκε επί των ερωτημάτων που απαντήθηκαν και εκφράστηκε στην κλίμακα 0-2. Στην περίπτωση που στο σχέδιο βαθμολόγησης υπήρχαν και μερικώς ορθές απαντήσεις αυτές θεωρήθηκαν μία κατηγορία. Τεχνικά ο βαθμός απόδοσης υπολογίστηκε ως το μέρος των σωστών απαντήσεων με αναγωγή στην κλίμακα 0-2. Έτσι στις περιπτώσεις που είχαμε  $\alpha$  σωστές και  $\beta$  εσφαλμένες απαντήσεις χρησιμοποιήθηκε ο τύπος  $2 \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$  ενώ στις περιπτώσεις που είχαμε  $\alpha$  σωστές και  $\gamma$  εσφαλμένες και  $\beta$  ενδιάμεσης ορθότητας απαντήσεις χρησιμοποιήθηκε ο τύπος  $2 \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$ .

## Παρουσίαση και συνοπτική καταγραφή δεδομένων ανά επιλεγμένο θέμα του PISA 2012

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 1

**α** Εντοπισμός σε ραβδοδιάγραμμα στατιστικών δεδομένων, με τη μέθοδο των πολλαπλών απαντήσεων:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
13,96	83,71	2,33

Δείκτης Απόδοσης: 1,71

Δείκτης εμπλοκής: 97,67

**β** Εντοπισμός σε ραβδοδιάγραμμα σχετικότητας μεγεθών (μεγαλύτερο-μικρότερο για πρώτη φορά), με τη μέθοδο των πολλαπλών απαντήσεων:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
30,36	67,74	1,90

Δείκτης Απόδοσης: 1,37

Δείκτης εμπλοκής: 99,1

**γ** Εκτίμηση, από τις τιμές προηγούμενων μηνών, των τιμών ενός μεγέθους στο μέλλον, με αναγνώριση του «βήματος απομείωσης» και εκτίμηση από πολλαπλές πιθανές απαντήσεις:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
31,20	67,46	1,33

Δείκτης Απόδοσης: 1,37

Δείκτης εμπλοκής: 97,67

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 2

**γ.** Πρόβλημα προμήθειας εξοπλισμού για μείωση κόστους και υπολογισμού χρόνου απόσβεσης, όπου υπεισέρχονται ποσοστιαίες μεταβολές:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
43,58	9,27	47,15

- Υποδεικνύεται μεγάλο ποσοστό αποτυχίας.

- Πρόβλημα μεγάλης πολυπλοκότητας, τουλάχιστον σε ό,τι αφορά τα παρακάτω χαρακτηριστικά:
  - εκτενές πολυτροπικό κείμενο,
  - διάσπαρτη πληροφορία,
  - σύνθετη μαθηματική δομή.
- Η στατιστική μας δειγματοληψία, στην οποία το ποσοστό επιτυχίας είναι πολύ μικρότερο από το πανελλαδικό, υποδεικνύει ότι οι μαθητές/μαθήτριες δεν κατέγραψαν (αν και ρητά ζητείται) υπολογισμούς που ταιριάζουν με/αρμόζουν για την προσπάθεια αιτιολόγησης του συμπεράσματός τους. Με δεδομένο το παραπάνω, συνολικά δεν υποδεικνύεται η δυνατότητα των μαθητών/μαθητριών να ανταποκριθούν (έστω και μερικώς) σε τέτοιο πρόβλημα.  
Σημειώνεται ότι στο σύνολο των χωρών που συμμετείχαν, το καλύτερο ποσοστό ορθών απαντήσεων ήταν 47,04, ενώ ο μέσος όρος 15,92 (δύσκολο πρόβλημα).

Δείκτης Απόδοσης: 0,35

Δείκτης εμπλοκής: 52,85

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 3

**α** Πρόβλημα που αφορά υπολογισμό γωνίας σε σκαρίφημα φυσικού αντικειμένου, με σχετικές περιγραφές:

- Από τη συνολική βαθμολογία της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
38,39	48,55	13,06

- Το πρόβλημα αφορά τον επιμερισμό κυκλικού χωρίου, και θα ανέμενε κανείς την ευχερή απάντηση των μαθητών/μαθητριών. Η σχηματική αναπαράσταση αφορά κάτοψη και περιγραφές.
- Τίθεται ερώτημα αν οι μαθητές/μαθήτριες δυσκολεύονται να εντοπίσουν εξαιρετικά ευχερή συμπεράσματα εξαιτίας της αναφοράς σε – πιθανά – μη γνωστό τους σχήμα (περιστρεφόμενη πόρτα), και μάλιστα, ειδικότερα, τρισδιάστατο.
- Δείκτης Απόδοσης: 1,12
- Δείκτης εμπλοκής: 86,94

**β** Πρόβλημα νοητικού πειραματισμού, ισχυρά συνδεδεμένου με το ειδικό πλαίσιο του προβλήματος:

- Από τη συνολική βαθμολογία της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
61,65	33,24	5,13

- Το πρόβλημα είναι ολωσδιόλου εκτός του πλαισίου της εγκύκλιος μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό υποδεικνύεται και για τις βαθμολογίες/τα εκπαιδευτικά συστήματα των άλλων συμμετεχόντων χωρών.
- Δείκτης Απόδοσης: 0.7
- Δείκτης εμπλοκής: 94,87

**γ** Πρόβλημα υπολογισμού τόξου:

- Από τη συνολική βαθμολογία της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
64,91	0,64	34,45

- Πρόκειται για πρόβλημα αυξημένης δυσκολίας, αν και δίνεται σχήμα αναφοράς, με αναγωγή και σε αποτέλεσμα προηγούμενου ερωτήματος. Η σημασία του «πλαισίου του προβλήματος» είναι, και πάλι, βαρύνουσα.
- Δείκτης Απόδοσης: 0.02
- Δείκτης εμπλοκής: 65,55

#### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 4

**α** Πρόβλημα που αφορά στην εκτίμηση/στον εντοπισμό μεγεθών από παράθεση στατιστικών στοιχείων:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	μερικώς αποδεκτή	ορθή	αναπάντητη
21,02	9,85	36,10	33,03

- Αντιστοιχεί σε υλικό που καλούνται να διαχειριστούν οι μαθητές/μαθήτριες.
- Επαρκής αντιμετώπιση, δεδομένου του ποσοστού εμπλοκής.
- Δείκτης Απόδοσης: 1,08
- Δείκτης εμπλοκής: 66,97

**β** Πρόβλημα που αφορά στην εκτίμηση κατάταξης κατά την χρονική εξέλιξη σε διαδοχικά στατιστικά διαγράμματα:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
17,40	59,77	22,82

- Αντιστοιχεί σε υλικό που καλούνται να διαχειριστούν οι μαθητές/μαθήτριες.
- Επαρκής αντιμετώπιση.
- Δείκτης Απόδοσης: 1,55
- Δείκτης εμπλοκής: 77,18

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 5

Πρόβλημα που αφορά στην εκτίμηση εύρους μεταβολής ενός μεγέθους:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	μερικώς αποδεκτή	αναπάντητη
59,53	8,26	5,66	26,54

- Η ορθή απάντηση προϋποθέτει την αντίληψη ότι μία τιμή προς υπολογισμό μπορεί να κυμαίνεται σε ένα εύρος. Η δε απάντηση μπορεί να δοθεί είτε με χρήση γνωστής ανισότητας, η οποία, όμως, δεν διδάσκεται στο Γυμνάσιο, είτε με χειραπτική / κατασκευαστική προσέγγιση, η οποία δεν είναι διαδεδομένη στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.
- Επισημαίνουμε ότι ποσοστό 43,17% από τα 59,53% των εσφαλμένων απαντήσεων σε Πανελλαδικό επίπεδο αντιστοιχούν σε απαντήσεις – κατά κύριο λόγο, αλλά όχι αποκλειστικά – που απέδιδαν μοναδική τιμή<sup>17</sup> (ορθή ή όχι), ενώ ρητά ζητείτο το διάστημα τιμών.
- Δείκτης Απόδοσης: 0,15
- Δείκτης εμπλοκής: 73,46

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 6

Θέμα σύγκρισης μήκους γραμμικών σχημάτων που συντίθενται από κάθετες και διαγώνιες:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
41,37	47,31	11,33

- Παρατηρείται ότι οι περισσότεροι/-ες απάντησαν επιτυχώς.

<sup>17</sup> Πιθανολογείται αντιστοίχιση με το σύνθημα «μοναδική σωστή απάντηση», π.χ. κατ' αντιστοιχία με την επίλυση εξισώσεων, που κυριαρχεί.

- Αν και το σχετικό πρόβλημα δεν εμπεριέχεται ρητά στη διδακτέα ύλη ή/και στα διδακτικά εγχειρίδια του σχολείου, είναι πιθανό να μπορεί να ενταχθεί αυτό σε ό,τι στη σχετική ανάλυση του PISA 2012<sup>18</sup> καταγράφεται ως *θεώρηση ότι οι μαθητές/μαθήτριες εμπλέκονται σε επίλυση προβλημάτων και εκτός του πλαισίου του σχολείου*. Δεν εκτιμάται ότι υπήρξε ισχυρή στις μεγαλύτερες πλευρές απέναντι από μεγαλύτερες γωνίες σε τρίγωνο, αλλά εντοπίζεται κάποιο ποσοστό αναφοράς, όχι πάντα με το αναμενόμενο αποτέλεσμα, στις σχέσεις μηκών ορθογωνίου τριγώνου (υποτείνουσα, κάθετες).
- Δείκτης Απόδοσης: 1,07
- Δείκτης εμπλοκής: 88,67

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 7

Πρόβλημα που αφορά περίφραξη χωρίων:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
63,27	9,18	27,55

- Υποδεικνύεται πολύ μεγάλη αδυναμία επίλυσης του – σχετικά απλού – αυτού προβλήματος.
- Αντιστοιχεί, ουσιαστικά πλήρως, στη ρητά καταγεγραμμένη σε σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού και εγχειρίδια διδασκόντων, διαφοροποίηση όρων, εννοιών και τύπων μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού ενός σχήματος.
- Στη δειγματοληψία που κάναμε, εντοπίσαμε στατιστικά σημαντική σύγχυση περιμέτρου (και διαίρεσής της σε ίσα τμήματα) και εμβαδού (που περικλείεται από την περίμετρο).
- Η αναγωγή της «δημιουργίας ίδιων εμβαδών» στη διαίρεση του μήκους της περιμέτρου σε ισάριθμα τμήματα, χωρίς ανάκληση, π.χ. μονάδων μέτρησης ή άλλου κριτηρίου επιλάθευσης, ανάγει ευθέως στο «διδακτικό σύμβολαιο» (ό.π.) και υποδεικνύει τη στατιστικά επιβεβαιούμενη αποτυχία στους ρητά διατυπωμένους στόχους του μαθήματος σε προηγούμενες τάξεις.
- Δείκτης Απόδοσης: 0.25
- Δείκτης εμπλοκής: 72,45

<sup>18</sup> (OECD, PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do. Student Performance in Mathematics, Reading and Science. Volume I 2014), σελ. 29

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 8

**α** Πρόβλημα που αφορά μελέτη αριθμητικών στοιχείων για την απασχόληση, τα οποία παρατίθενται σε κείμενο, πίνακα και χάρτη:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
74,12	20,34	5,54

- Το πρόβλημα αφορά, κυρίως, στον εντοπισμό της – κρίσιμης – περιγραφής του όρου «εργατικό δυναμικό», που παρατίθεται κειμενικά και ως περιγραφή στήλης σε πίνακα και ως ρέον κείμενο. Η εκφώνηση ελέγχεται ως πολυτροπική και αρκούντως μεγάλη σε έκταση.
- Η αποτυχία αποδίδεται στην ελλιπή κατανόηση του κειμένου, αλλά και την «μηχανιστική» αναφορά, με αγνόηση των ρητών περιγραφών, σε όρους που συγχέουν ως «εργαζόμενους», όπως ενδεικτικά υποδεικνύεται και από τη δική μας στατιστική δειγματοληψία.
- Δείκτης Απόδοσης: 0.43
- Δείκτης εμπλοκής: 94.46

**β** Πρόβλημα που αφορά στην κατ' αναλογία συγκριτική αποτίμηση αριθμητικών δεδομένων και εικονικής πληροφορίας (ως προς το εμβαδόν):

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	μερικώς αποδεκτή	ορθή	αναπάντητη
56,12	41,19	2,47	0,22

- Δραστηριότητα που βρίσκεται εκτός των πλαισίων διδακτικής πρακτικής και περιεχομένων του Εκπαιδευτικού Συστήματος (Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση). Απαιτείται αποτίμηση αναλογίας εμβαδών προς αναλογία πληθυσμού, με διάγνωση της διαφοράς κατ' αναλογία, προς διαπίστωση πυκνότητας.
- Δείκτης Απόδοσης: 0.05
- Δείκτης εμπλοκής: 99.78

### ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΘΕΜΑ 9

**α** Πρόβλημα που αφορά σε λεκτική περιγραφή τύπου και αντικατάσταση της μεταβλητής με τιμή, ώστε να προκύψει το αριθμητικό αποτέλεσμα:



- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
27,08	62,45	10,48

- Παρατηρείται μεγάλο ποσοστό ορθών απαντήσεων
- Αντιστοιχεί σε πάγιο διδακτικό αίτημα της διδασκαλίας και υποδεικνύεται επαρκής κατανόηση/δεξιότητα υλοποίησης από τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Ελέγχεται, ίσως, το ποσοστό αποτυχίας σε σχέση με την τάση στα περιεχόμενα των διδακτικών εγχειριδίων να παρατίθενται οι τύποι (παραστάσεις συμβόλων, αριθμών και μεταβλητών) και όχι περιγραφές τους.
- Δείκτης Απόδοσης: 1.40
- Δείκτης εμπλοκής: 89,52

**β** Πρόβλημα που αφορά στην επαναπαραμετροποίηση τύπου, με αναγωγή σε νέα μονάδα μέτρησης κατ' αναλογία:

- Από τη συνολική βαθμολόγηση της Ελλάδας:

εσφαλμένη	ορθή	αναπάντητη
59,05	2,32	38,62

- Υποδεικνύεται πολύ μεγάλη αδυναμία υλοποίησης από τους μαθητές και τις μαθήτριες.
- Επισημαίνεται ότι η διαχείριση και επεξεργασία τύπων δεν εμπεριέχεται στην διδακτέα ύλη.
- Στα γραπτά από την τυχαία δειγματοληψία μας επισημάνθηκε η στατιστικά σημαντική καταγραφή τύπων που δεν αντιστοιχούν σε κάποιες (αποτυχημένες ή όχι) διερευνήσεις ως προς την περιγραφόμενη διαδικασία, αλλά αφήνουν να υποδειχθεί η συμπλήρωση με «γνωστές φόρμες» τύπων. Τίθεται το ερώτημα αν αυτό αντιστοιχεί σε «προτυποποίηση/συμπεριφορική αντίληψη», δηλαδή σε αυτό που αναφέρεται από τον Guy Brousseau ως «διδακτικό σύμβολο», που όταν σπάει προκύπτει η μάθηση<sup>19</sup>.
- Δείκτης Απόδοσης: 0.08
- Δείκτης εμπλοκής: 61,38

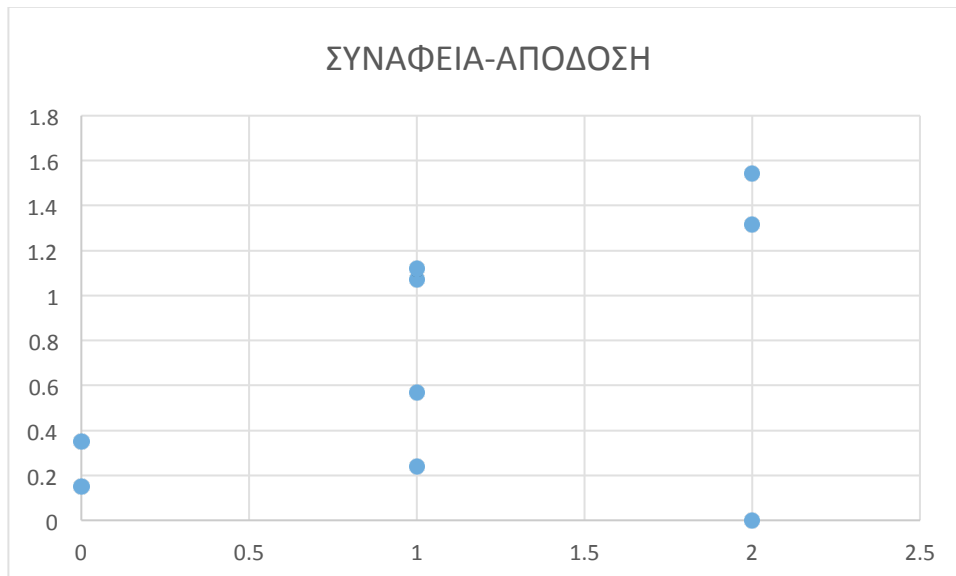
<sup>19</sup> (Brousseau 2002) ό.π.

## Αποτίμηση

Η συνάφεια, ο βαθμός απόδοσης και ο βαθμός εμπλοκής όλων των θεμάτων που μελετήθηκαν παρουσιάζονται στον πίνακα:

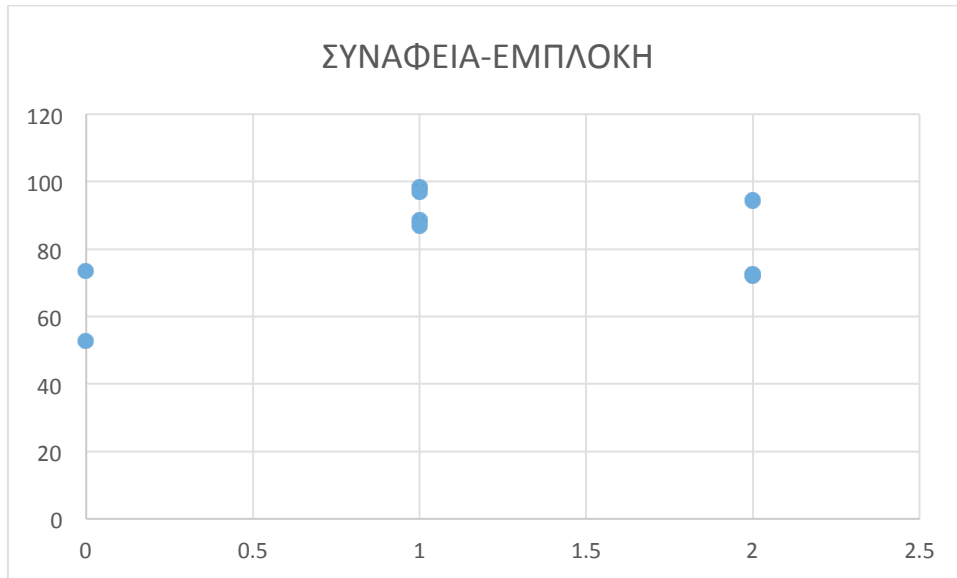
ΘΕΜΑ	ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΥΝΑΦΕΙΑΣ ΜΕ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ	ΒΑΘΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΣΕ ΕΘΝΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ (διακύμανση ερωτημάτων)	ΒΑΘΜΟΣ ΕΜΠΛΟΚΗΣ ΣΕ ΕΘΝΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ % (διακύμανση ερωτημάτων)
1	2	1,37-1,71	91,1-97,67
2	0	0,35	52,85
3	1	0,02-1,12	97,67-99,1
4	2	1,08-1,55	66,97-77,18
5	0	0,15	73,46
6	1	1,07	88,67
7	2	0,25	72,45
8	1	0,05-0,43	94,46-99-78
9	1	1,12	86,94

Αν θεωρήσουμε ως βαθμολογία θέματος το μέσο του διαστήματος που κυμαίνεται η βαθμολογία των επιμέρους ερωτημάτων, έχουμε την παράσταση συνάφειας-απόδοσης:



Υπάρχουν ενδείξεις (συντελεστής Pearson 0,84) ότι η απόδοση παρακολουθεί την συνάφεια, ωστόσο υπάρχουν και μη αναμενόμενες τιμές, όπως εκείνη του θέματος 8 που, αν και αποτιμήθηκε ως συναφές, συνοδεύτηκε με μικρή απόδοση.

Το αντίστοιχο διάγραμμα για συνάφεια-εμπλοκή είναι το ακόλουθο:



Τα στοιχεία δεν φαίνεται να συνδέουν τη συνάφεια με την εμπλοκή, το μέγεθος την οποίας φαίνεται να εξαρτάται από άλλους παράγοντες (περιεχόμενο θέματος, έκταση κ.ά.).

Επιπρόσθετα, από τη δειγματοληπτική διερεύνηση και αποτίμηση των απαντήσεων μαθητών και μαθητριών των Ελληνικών σχολείων που συμμετείχαν στον PISA 2012 σε Θέματα που επελέγησαν με κριτήριο κρίσιμες συνάφειες με (ή αποστάσεις από) τα περιεχόμενα των ΑΠΣ, προκύπτουν τα ακόλουθα, που αφορούν πρωτίστως στην αποτίμηση της επίτευξης, μέσω της αντίστοιχης απόδοσης/επίδοσης των μαθητών/μαθητριών, ρητά διατυπωμένων αντίστοιχων προθέσεων των Ελληνικών ΑΠΣ, και δευτερευόντως, αλλά όχι άνευ σημασίας, τη δυνατότητα των μαθητών και μαθητριών να ανταποκριθούν στις γνωστικές απαιτήσεις που θέτουν τα προβλήματα του PISA:

- Επισημαίνεται η επαρκής αντιμετώπιση θεμάτων που αφορούν στον εντοπισμό της πληροφορίας – όπως εκτίθεται, χωρίς περίπλοκη κριτική αποτίμηση – από στατιστικά διαγράμματα, όπως στα:
  - Επιλεγμένο Θέμα 1
  - Επιλεγμένο Θέμα 4
- Εντοπίστηκε η αναγωγή σε γνωστές και εγγύς της απάντησης έννοιες και μεθοδολογικές επιλογές για θέμα που η διατύπωσή του δεν ανήγαγε ρητά σε αυτές, που, όμως δεν απέδωσε για περίπου τους/τις μισούς/μισές από όσους/όσες απάντησαν. Υποδεικνύεται, επιπροσθέτως, μια αδυναμία περάτωσης της (ορθής, στις περιγραφόμενες περιπτώσεις) μαθηματικοποίησης του προβλήματος. Σχετικά:
  - Επιλεγμένο Θέμα 6

- Επισημαίνεται μια σταθερή «εμμονή» στην – κακώς νοούμενη – «αλγοριθμική αντίληψη» της «επίλυσης προβλήματος», τέτοια, που κατατείνει στο «διδασκτικό συμβόλαιο» (που «πρέπει να σπάσει, ώστε να προκύψει γνώση») του Brousseau <sup>20</sup>.

Ενδεικτικά:

- Στο Επιλεγμένο Θέμα 7, η περιγραφή για «κατασκευή περίφραξης από δεδομένο μήκος για τρία ίσα χωρία», οδήγησε σε μεγάλο, στατιστικά, ποσοστό (στα γραπτά που ελέγξαμε) στη διαίρεση του μήκους σε τρία ίσα τμήματα, αν και ζητούμενο ήταν το εμβαδόν των προκυπτόντων χωρίων, πόλλω δε μάλλον, με δεδομένο ότι η απεικονισμένη κατασκευή υποδεικνυε ότι κάποιο μέρος της περίφραξης αντιστοιχεί σε δύο χωρία. Επισημαίνεται ειδικά, εδώ, ότι το «πρόβλημα της σύγχυσης μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου» αποτελεί αντικείμενο (άρα και αίτημα η άρση της σύγχυσης) των εγχειριδίων (εκτιμούμε, και της διδασκαλίας) των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, αλλά και της Β΄ Γυμνασίου.
- Στο Επιλεγμένο Θέμα 9, β., όπως ήδη επισημάνθηκε, παρατέθηκαν τύποι που – αν και δεν αντιστοιχούν, π.χ. ως προς τις προκύπτουσες μονάδες μέτρησης, στο ζητούμενο – προσομοιάζουν με γνωστούς τύπους αναλογιών. Δείκτης Απόδοσης: 0,08, Δείκτης εμπλοκής: 61,38: παρά την συνθετότητά του, έχει υψηλό Δείκτη Εμπλοκής, που δεν υποδεικνύει ότι θεωρήθηκε «αδύνατο να απαντηθεί» από τους μαθητές και τις μαθήτριες.
- Υποδεικνύεται μια αδυναμία αντιμετώπισης προβλημάτων-κειμένων (word problems) που προσιδιάζουν προς «προβλήματα της καθημερινότητας»<sup>21</sup>, αφού δεν διατυπώνουν, απλώς, λεκτικά το μαθηματικό πρόβλημα ως τύπο, αλλά αναφέρονται σε «εφαρμογές» που χρήζουν «μαθηματικής αντιμετώπισης» (problematic problems<sup>22</sup>), ακόμα και αν αυτή η «μαθηματικοποίηση αφορά την επίπεδη αναπαράσταση τρισδιάστατου σχήματος. Ενδεικτικά:
  - Στο Επιλεγμένο Θέμα 3, α., το ζητούμενο αντιστοιχεί, απλώς, στον υπολογισμό της γωνίας που αποτελεί το ένα τρίτο του κύκλου, αλλά περίπου 4 από τους/τις 9 μαθητές/μαθήτριες που απάντησαν, απάντησαν εσφαλμένα, κάτι που δεν ήταν καθόλου αναμενόμενο. Εκτιμούμε ότι το πρόβλημα είναι η αναφορά σε τρισδιάστατο αντικείμενο και δεν αναγνωρίζεται η προφανής τριχοτόμηση της γωνίας, παρόλο που παρίσταται στην κάτοψη.

<sup>20</sup> (Brousseau 2002) ό.π.

<sup>21</sup> Άρα, κατά τα ΑΠΣ και ΑΠΣ/ΔΕΠΠΣ, αντιστοιχούν σε ό,τι επιδιώκεται να μπορεί να αντιμετωπίσει ο μαθητής και η μαθήτρια.

<sup>22</sup> (Καγκουρά 2008) σελ. 9

- Ειδικότερα, επισημαίνεται μια αδυναμία στον εντοπισμό της «κρίσιμης» πληροφορίας σε κείμενα κάποιου μεγέθους ή/και αγνόησης της διατυπωμένης πληροφορίας υπέρ της υιοθέτησης μιας προϋπάρχουσας, πιθανά προηγούμενα επεξεργασμένης στην εγκύκλια διαδικασία μάθησης, που – εσφαλμένα – την υποκαθιστά στις επεξεργασίες. Ενδεικτικά:
  - Στο Επιλεγμένο Θέμα 5, ζητείται *ρητά* το εύρος που δύναται να έχει ένα μέγεθος (μήκος), αλλά πολλές απαντήσεις πρότειναν *μοναδική τιμή*, εκτιμούμε, ως είθισται στα προβλήματα (εν γένει με μορφή «μοναδικής σωστής απάντησης», πιθανά έως δύο τιμών) με τα οποία εμπλέκονται οι μαθητές και μαθήτριες στη διδακτική πράξη.
  - Στο Επιλεγμένο Θέμα 8, α., δίνεται σε *δύο σημεία* (στο υπερκείμενο κείμενο και στην περιγραφή της στήλης πίνακα) το περιεχόμενο του όρου «εργατικό δυναμικό», αλλά αγνοήθηκε, υπέρ του όρου «εργαζόμενοι», από μεγάλο ποσοστό μαθητών και μαθητριών.

## Προτάσεις

Θεωρούμε ότι, αν είναι επιθυμητό να επιτευχθεί σύγκλιση της εκπαιδευτικής διαδικασίας με τις αρχές που αξιολογούνται από το PISA, είναι ουσιώδες να αναδειχθεί η ενασχόληση με τα προβλήματα ως βασικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Επισημαίνεται ότι η εκτίμησή μας για την αξία της ενασχόλησης των μαθητών/μαθητριών με προβλήματα στο μάθημα των Μαθηματικών και, συναφώς, για την κατάλληλη διαμόρφωση των ΑΠΣ των Μαθηματικών, είναι ανεξάρτητη από την προσέγγιση των στόχων του PISA, και νοείται ως παιδαγωγική και μαθησιακή διεργασία με αυταξία, ευρύτερη, μάλιστα, του ειδικού αντικειμένου του μαθήματος των Μαθηματικών.

Προς αυτή την κατεύθυνση βραχυπρόθεσμα μπορούν να συμβάλλουν οι ακόλουθες *άμεσες* ενέργειες:

1. Ενθάρρυνση των διδασκόντων να προχωρήσουν σε μια διδακτική μετατόπιση, εντάσσοντας τα προβλήματα στο καθημερινό διδακτικό ρεπερτόριο. Ήδη, στις οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών του Γυμνασίου του 2017, καταβλήθηκε προσπάθεια να προταχθούν οι δραστηριότητες, αλλά αυτό δεν είναι αρκετό. Χρειάζεται εκπόνηση ειδικού οδηγού με τεκμηρίωση και υλικό.

2. Συστηματική ένταξη των προβλημάτων στις τελικές εξετάσεις, ένταξη που, μεταξύ άλλων, σηματοδοτεί την αξία τους. Στο Ι.Ε.Π. έχει συνταχθεί από το 2017 σχετική πρόταση για το νομοθετικό πλαίσιο (βλ. στο Προσάρτημα 1).

## Αναφορές

Attard, Catherine. «"I don't like it, I don't love it, but I do it and I don't mind": introducing a framework for engagement with Mathematics.» *Curriculum Perspectives*, 34,3, 2014 σελ. 1-14., n.d.

Brousseau, Guy. *Theory of didactical situations in Mathematics*. Kluwer, 2002.

Ε.Κ. Έκθεση παρακολούθησης της εκπαίδευσης και της κατάρτισης του 2016. Ελλάδα. 2016.

Eurostat. *Smarter, greener, more inclusive? Indicators to support the Europe 2020 strategy*. Eurostat, 2016.

Hatzinikita, Vassilia κ.α. «PISA Test Items and School Textbooks Related to Science: A Textual Comparison.» *Science Education*, 2007: 664-687.

OECD. *Learning Mathematics for Life. A perspective from PISA*. OECD , 2009.

—. *Mathematics Teaching and Learning Strategies in PISA*. OECD , 2010.

—. *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do. Student Performance in Mathematics, Reading and Science. Volume I*. OECD , 2014.

—. *PISA 2012 Results: Creative Problem Solving: Students' Skills in Tackling Real-Life Problems (Volume V)*. OECD, 2014.

Valerie & Goldin, Gerald A. «Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective.» *Educational Studies in Mathematics No 63*, 2006, n.d.

Αργυράκης, κ.α. *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*. ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ, 2007 κ.ε.

Βανδουλάκης, κ.α.,. *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου*. ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ, 2007 κα.

Βλάμος, κ.α. *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ, 2007 κ.ε.

Καγκουρά, Θεώνη. *Διδακτικό Συμβόλαιοι-Στάσεις και Πεποιθήσεις των μαθητρών για τη Μαθηματικά και επίλυση ασυνήθιστων αριθμητικών λεκτικών προβλημάτων. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία*. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2008.

Καπετανάς, Ελευθέριος. *Πεποιθήσεις και στάσεις των μαθητών του Λυκείου για τα Μαθηματικά, παράγοντες που τις διαμορφώνουν και δύνδεση τους με την μαθηματική επίδοση*. Διδακτορική Διατριβή . ΕΚΠΑ Τμήμα Μαθηματικών, 2016.

Μάρκου, Δήμητρα. *Ανθεκτικοί (resilient) μαθητές στα Μαθηματικά: Η επίδραση του περιβάλλοντος μάθησης του σχολείου. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία.* . Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2017.

Σοφianoπούλου, Χρύσα. *Ανάλυση της εκπαιδευτικής επίδοσης. Μελέτη περίπτωσης: Το διεθνές πρόγραμμα για την αξιολόγηση των μαθητών PISA.* Εκδόσεις Παπαζήση, 2011.

Σπηλίδης, Κωνσταντίνος,. *Μαθηματικά μεταξύ του προγράμματος σπουδών και εφαρμογών τους. Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία.* Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2018.



# ΠΡΟΣΑΡΤΗΜΑ 1

**«Τροποποίηση του Π.Δ. 508/77 (Τεύχος Πρώτο, ΦΕΚ 161), που αφορά στις Γραπτές Ανακεφαλαιωτικές Προαγωγικές και Απολυτήριες Εξετάσεις των μαθητών και μαθητριών ημερήσιου και εσπερινού Γυμνασίου στα Μαθηματικά»**

*Ο τρόπος εξέτασης των μαθητών/μαθητριών Γυμνασίου στα Μαθηματικά στις γραπτές προαγωγικές και απολυτήριες εξετάσεις προσδιορίζεται από το ως άνω Π.Δ. (σελ. 1316). Οι στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο καθώς και η δομή των σχολικών βιβλίων των Μαθηματικών (εισαγωγικές δραστηριότητες, ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου) επιβάλλουν την αλλαγή του ισχύοντος, μέχρι σήμερα, τρόπου εξέτασης, ώστε να αντιστοιχεί η αξιολογική διαδικασία με τον τρόπο διδασκαλίας και προσέγγισης της γνώσης όπως οριοθετείται από τα σχολικά βιβλία και τις οδηγίες διδασκαλίας.*

*Πιο συγκεκριμένα, προτείνεται οι μαθητές/μαθήτριες να εξετάζονται σε τέσσερα θέματα η διάρθρωση, και διαβάθμιση ως προς την συνθετότητα, των οποίων είναι παρόμοια με αυτήν που προβλέπεται για το Λύκειο. Επιπλέον, το τέταρτο θέμα αναφέρεται στην επίλυση ενός προβλήματος, στοιχείο που εισάγεται για πρώτη φορά καθώς το πρόβλημα είναι πηγή απόδοσης νοήματος στην μαθηματική γνώση, αλλά και το πεδίο αναγνώρισης της αξίας και της δυναμικής της, με αναφορά στην καθημερινότητα των μαθητριών και μαθητών.*

**Γραπτές ανακεφαλαιωτικές προαγωγικές κα απολυτήριες εξετάσεις ημερήσιου και εσπερινού Γυμνασίου στα Μαθηματικά**

**I.** Στους μαθητές και στις μαθήτριες δίνονται τέσσερα (4) θέματα από την εξεταστέα ύλη, με τα οποία ελέγχεται η γνώση εννοιών και η δυνατότητα συμβολικής τους έκφρασης, η δυνατότητα αναπαραγωγής γνωστικών στοιχείων, η ικανότητα εκτέλεσης γνωστών αλγορίθμων, η ικανότητα ανάλυσης, σύνθεσης και δημιουργικής επεξεργασίας δεδομένου υλικού καθώς και η ικανότητα επιλογής και εφαρμογής κατάλληλης μεθόδου.

**II.** Τα τέσσερα θέματα διαρθρώνονται ως εξής:

α. Το πρώτο θέμα αποτελείται από πέντε απλές ερωτήσεις θεωρίας αντικειμενικού τύπου (πολλαπλής επιλογής, Σωστού – Λάθους, αντιστοίχισης), σε μία από τις οποίες ζητείται η αιτιολόγησή της.

β. Το δεύτερο θέμα είναι μία άσκηση που είναι άμεση εφαρμογή ενός ουσιώδους στοιχείου της θεωρίας (Θεωρήματος, Πορίσματος, Ιδιότητας, Ορισμού, Αλγόριθμου) και η αξία του έχει επισημανθεί στη διδασκαλία.

γ. Το τρίτο θέμα είναι μία άσκηση που ελέγχει την ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης εννοιών και αποδεικτικών ή υπολογιστικών διαδικασιών.

δ. Το τέταρτο θέμα αποτελείται από ένα πρόβλημα που η λύση του απαιτεί την κατανόηση της διατύπωσής του, τον κατάλληλο μετασχηματισμό του

(μαθηματικοποίηση), την εκτέλεση μαθηματικών διαδικασιών, και την απόδοση νοήματος στη μαθηματική λύση σε σχέση με την αρχική διατύπωση του προβλήματος.

ε. Το τρίτο και τέταρτο θέμα μπορούν να αναλύονται σε επιμέρους ερωτήματα – το πολύ έως τρία – που διευκολύνουν την επίλυση. Το δεύτερο και το τρίτο θέμα αναφέρονται το καθένα σε ένα μόνο κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου.

**III.** Για την κατανομή της βαθμολογίας ισχύουν τα εξής:

α. Τα τέσσερα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

β. Οι ερωτήσεις στο πρώτο θέμα είναι και αυτές ισοδύναμες.

γ. Στο τρίτο και τέταρτο θέμα οι βαθμολογικές μονάδες στα επιμέρους ερωτήματα γνωστοποιούνται στη διατύπωση των θεμάτων.

