ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ομάδας Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών

2020

ΕΚΠΟΝΗΣΗ

Μιχαήλ Λουλάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Δημήτριος Διαμαντίδης, Εκπαιδευτικός Δημοσίου Τομέα (ΠΕ03)
Κωνσταντίνος Στουραΐτης, Σύμβουλος Α' ΙΕΠ

Το παρόν εκπονήθηκε αμισθί, με ευθύνη του ΙΕΠ με βάση την υπ' αριθμ. 27/29-05-2020 Πράξη του ΔΣ του ΙΕΠ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Ιωάννης Αντωνίου

Πρόεδρος του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1 : ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ, ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Τα χρώματα μιας ομάδας βόλεϊ είναι λευκό, γαλάζιο και μαύρο. Για κάθε παίκτη/παίκτρια η ομάδα δίνει τα εξής ρούχα:

- Τρεις μονόχρωμες μπλούζες: Μία λευκή (Λ), μία γαλάζια (Γ) και μία μαύρη (Μ).
- Τρία μονόχρωμα σορτσάκια, στα ίδια χρώματα με τις μπλούζες.
- Δύο ζευγάρια κάλτσες, ένα μαύρο κι ένα λευκό.

Επιλέγουμε τυχαία μία μπλούζα, ένα σορτσάκι κι ένα ζευγάρι κάλτσες.

α) Να γράψετε έναν δ.χ. του πειράματος τύχης.

β) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω δ.χ. να βρείτε το ενδεχόμενο Α: «τα ρούχα που επιλέξαμε έχουν ίδιο χρώμα».

Λύση

α) Για να συμβολίσουμε κάθε στοιχείο του δ.χ. θα χρησιμοποιήσουμε διατεταγμένες τριάδες. Για παράδειγμα, η τριάδα ΛΓΜ σημαίνει Λευκή μπλούζα, Γαλάζιο σορτσάκι, Μαύρες κάλτσες. Δηλαδή πάντα πρώτο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος της μπλούζας, δεύτερο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος του σορτς και τρίτο γράφουμε το αρχικό γράμμα του χρώματος των καλτσών.

Άρα ως δ.χ. γράφουμε τον

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\Lambda\Lambda\Lambda, \Lambda\Lambda M, \Lambda\Gamma\Lambda, \Lambda\Gamma M, \Lambda M\Lambda, \Lambda MM,\\ &\Gamma\Lambda\Lambda, \Gamma\Lambda M, \Gamma\Gamma\Lambda, \Gamma\Gamma M, \Gamma M\Lambda, \Gamma MM,\\ &M\Lambda\Lambda, M\Lambda M, M\Gamma\Lambda, M\Gamma M, MM\Lambda, MMM\}\end{aligned}$$

β) Το ενδεχόμενο είναι: $A = \{\Lambda\Lambda\Lambda, MMM\}$.

Άσκηση 2

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Στον δ.χ. της εφαρμογής 2 να βρείτε τα ενδεχόμενα:

α) Α: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης.

β) Β: Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός.

γ) Γ: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι 6.

δ) $A \cap B$, $A \cup B$, $B - \Gamma$, $A - \Gamma$ και $\Gamma - A$.

Λύση

Παρακάτω γράφουμε τον δ.χ. της εφαρμογής 2:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

α) Χρωματίζουμε τα κελιά, που ο πρώτος από τους δύο αριθμούς είναι μεγαλύτερος από τον δεύτερο

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Άρα:

$A = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$

β) Χρωματίζουμε τα κελιά, που το άθροισμα των δύο αριθμών είναι άρτιο.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

$$\begin{aligned} B = \{&(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),\\ &(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\} \end{aligned}$$

γ) Τα κελιά της τελευταίας γραμμής αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο Γ, άρα:

$$\Gamma = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

δ) $A \cap B = \{(3,1),(4,2),(5,1),(5,3),(6,2),(6,4)\}$

$$\begin{aligned} A \cup B = \{&(1,1),(1,3),(1,5),\\ &(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

$B - \Gamma = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

$A - \Gamma = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$

$\Gamma - A = \{(6,6)\}$

Άσκηση 3

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία κόκκινη και μία μαύρη. Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα τυχαία και καταγράφουμε το χρώμα της. Μετά ξανατοποθετούμε τη μπάλα στο κουτί και επαναλαμβάνουμε άλλη μία φορά την τυχαία επιλογή μπάλας. Έτσι, στο τέλος έχουμε καταγράψει δύο χρώματα (ίδια ή διαφορετικά), ένα για κάθε μπάλα που επιλέξαμε. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Ποιο είναι το ενδεχόμενο A: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη»;

β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο B: «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»;

γ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A \cap B$ και να το βρείτε.

δ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A - B$ και να το βρείτε.

<u>Λύση</u>

Θεωρώντας ότι με Α συμβολίζουμε την καταγραφή μπάλας άσπρου χρώματος, με Κ κόκκινου χρώματος και με Μ μαύρου χρώματος, ως δ.χ. του πειράματος τύχης γράφουμε τον $\Omega = \{AA, AK, AM, KA, KK, KM, MA, MK, MM\}$

α) $A = \{KA, KK, KM\}$

β) $B = \{AK, KK, MK\}$

γ) $A \cap B$: «η πρώτη και η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινες»

$A \cap B = \{KK\}$

δ) $A - B$: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη μπάλα δεν είναι κόκκινη»

$A - B = \{KA, KM\}$

Άσκηση 4

Να λύσετε την άσκηση 3, αν αυτή τη φορά η μπάλα που εξάγεται την πρώτη φορά δεν επανατοποθετείται στο κουτί πριν τη δεύτερη εξαγωγή μπάλας.

<u>Λύση</u>

Θεωρώντας, όπως και στην άσκηση 3, ότι με Α συμβολίζουμε την καταγραφή μπάλας άσπρου χρώματος, με Κ κόκκινου χρώματος και με Μ μαύρου χρώματος, ως δ.χ. του πειράματος τύχης γράφουμε τον

$$\Omega = \{AK, AM, KA, KM, MA, MK\}$$

α) $A = \{KA, KM\}$

β) $B = \{AK, MK\}$

γ) $A \cap B = \varnothing$: «η πρώτη και η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινες».

δ) $A - B = \{KA, KM\}$: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη μπάλα δεν είναι κόκκινη».

Άσκηση 5

Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα A', $A \cup \Gamma$, $A - \Gamma$ και $B - \Gamma$, όπου:

Α: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός»,

Β: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7»,

Γ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

<u>Λύση</u>

A': «Δεν είναι το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων άρτιος αριθμός» ή αλλιώς A': «Το αποτέλεσμα μιας τουλάχιστον από τις δύο ρίψεις είναι περιττός αριθμός»

$A \cup \Gamma$: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός ή το αποτέλεσμά και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

$A - \Gamma$: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός, αλλά δεν είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 3». Ή εναλλακτικά «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός, αλλά ένας τουλάχιστον είναι μικρότερος του 3».

$B - \Gamma$: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7, αλλά δεν είναι και οι δύο μεγαλύτεροι του 3».

Άσκηση 6

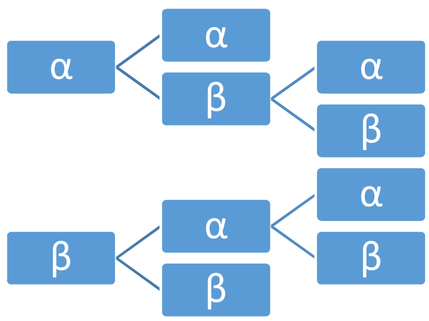
Δύο παίκτες παίζουν σκάκι και συμφωνούν να είναι νικητής εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παρτίδες. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης, από τον οποίο να προκύπτει πόσα παιχνίδια έγιναν μέχρι να βγει νικητής, ποιος προηγήθηκε και ποιος τελικά κέρδισε.

<u>Λύση</u>

Έχουμε δύο παίκτες, τους Α και Β. Ας συμβολίσουμε ως α τη νίκη του Α σε μια παρτίδα και ως β τη νίκη του Β σε μια παρτίδα.

Τότε, το παρακάτω διάγραμμα εκφράζει όλες τις δυνατές εκβάσεις του παιχνιδιού.

1η παρτίδα 2η παρτίδα 3η παρτίδα (αν χρειαστεί)



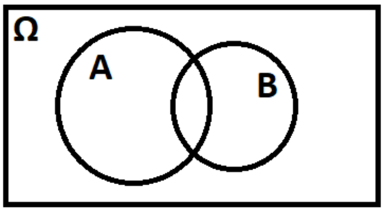
Άρα Ω = {αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ}.

Σε κάθε στοιχείο του δ.χ. φαίνονται οι πληροφορίες που ζητούνται. Π.χ. στην έκβαση αββ, χρειάστηκε να γίνουν 3 παρτίδες, προηγήθηκε ο Α και νίκησε τελικά ο Β.

Πρόσθετο υλικό

Άσκηση 1

Οι ένοικοι μίας πολυκατοικίας παρκάρουν τα οχήματά τους σε ένα χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το Α έχει ως στοιχεία του ενοίκους που έχουν αυτοκίνητο και το Β εκείνους που έχουν μηχανή. Επιλέγουμε τυχαία έναν ένοικο.



Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κ.τ.λ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα, ο ένοικος που επιλέγουμε:

α) έχει αυτοκίνητο και μηχανή.
β) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
γ) δεν έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
δ) δεν έχει αυτοκίνητο και δεν έχει μηχανή.
ε) δεν έχει (και) αυτοκίνητο και μηχανή.
στ) δεν έχει αυτοκίνητο ή δεν έχει μηχανή.
ζ) έχει μόνο αυτοκίνητο ή έχει μόνο μηχανή.
η) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή, αλλά δεν ανήκει σε αυτούς που έχουν και αυτοκίνητο και μηχανή.

<u>Λύση</u>

α) $A\cap B$
β) $A\cup B$
γ) $(A\cup B)'$
δ) $A'\cap B'$
ε) $(A\cap B)'$
στ) $A'\cup B'$
ζ) $(A-B)\cup(B-A)$
η) $(A\cup B)-(A\cap B)$

Σχόλιο: Φαίνεται ότι κάποιες λεκτικές διατυπώσεις περιγράφουν το ίδιο σύνολο ενοίκων. Αυτές αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα, όπως φαίνεται στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 2

Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δ.χ. Ω να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της πρώτης στήλης με τα ίσα προς αυτά ενδεχόμενα της δεύτερης στήλης.

1η στήλη	2η στήλη
$(A \cup B)'$	$A' \cup B'$
$(A \cap B)'$	$(A \cup B) - (A \cap B)$
$(A - B) \cup (B - A)$	$A' \cap B'$

Στη συνέχεια να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα του πίνακα. Ποιες λεκτικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα;

<u>Λύση</u>

$(A \cup B)' = A' \cap B'$. Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Το αντίθετο του ενδεχομένου "πραγματοποιείται το Α ή το Β"» και «Δεν πραγματοποιείται ούτε το Α ούτε το Β».

$(A \cap B)' = A' \cup B'$. Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β» και «Δεν πραγματοποιείται το Α ή δεν πραγματοποιείται το Β».

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$. Οι λεκτικές εκφράσεις που αντιστοιχούν σε αυτά τα ίσα ενδεχόμενα είναι «Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β» και «Πραγματοποιείται το Α ή το Β, αλλά όχι και τα δύο συγχρόνως».

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ: ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4.

β) Το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4.

γ) Το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός.

<u>Λύση</u>

Ως δ.χ. του πειράματος τύχης θεωρούμε τον Ω που παριστάνεται με τον παρακάτω πίνακα:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Είναι Ν(Ω) = 36.

α) Έστω Α το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4».

Είναι Α = {(1,3), (2,2), (3,1)}, άρα P(A) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

β) Έστω Β το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4».

Το πλήθος των στοιχείων του Β είναι Ν(Β) = 30.

Άρα P(B) = $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο «το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός».

Π.χ. ένα στοιχείο του Γ είναι το (2,1) καθώς 2+1=3, περιττός.

Είναι Ν(Γ) =18 και P(Γ) = $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο απλός προσθετικός νόμος προκύπτει ως συνέπεια του κλασικού ορισμού.

<u>Λύση</u>

Έστω δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω, τα οποία είναι ασυμβίβαστα. Επίσης υποθέτουμε ότι Ν(Ω) = ν, Ν(Α) = α και Ν(Β) = β.

Τότε, όλα τα στοιχεία των Α και Β αποτελούν την ένωση $A \cup B$. Επίσης, κανένα στοιχείο των Α και Β δεν είναι κοινό, καθώς είναι ασυμβίβαστα. Επομένως, το πλήθος των στοιχείων της ένωσης είναι α+β, δηλαδή $N(A \cup B) = \alpha + \beta$.

Άρα, $P(A \cup B) = \dfrac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \dfrac{\alpha+\beta}{\nu} = \dfrac{\alpha}{\nu} + \dfrac{\beta}{\nu} = P(A) + P(B)$.

Άσκηση 3

Ένα κέρμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κατά τη ρίψη του η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95. Θεωρείτε ότι το πείραμα αυτό είναι πείραμα τύχης;

Λύση

Ναι, είναι πείραμα τύχης, καθώς δεν μπορούμε να προβλέψουμε την έκβασή του. Αν και η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι αρκετά μεγάλη, δηλαδή 0,95, ωστόσο η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζονται γράμματα» είναι 1-0,95=0,05, δηλαδή υπάρχει. Άρα δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα την έκβαση της ρίψης του κέρματος.

Με απλά λόγια, σε μια ρίψη του κέρματος είναι πιθανές και οι δύο εκβάσεις και δεν μπορούμε να προβλέψουμε ποιο θα είναι το αποτέλεσμα. Το γεγονός ότι αναμένουμε ως πιο πιθανή έκβαση την εμφάνιση κεφαλής, δεν αίρει την αδυναμία μας να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα.

Άσκηση 4

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της 1ης στήλης με τις πιθανότητες της 2ης στήλης:

1^{η} στήλη
— Έρχεται διπλή ζαριά (το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο ζάρια.)
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός αριθμός.
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
— Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα.
— Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.
— Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.

2^{η} στήλη
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
0,5

Λύση

Με τη βοήθεια του δειγματικού χώρου του πειράματος τύχης (βλέπε λύση άσκησης 1), βρίσκουμε τα εξής:

Έρχεται διπλή ζαριά: πιθανότητα $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός: πιθανότητα $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}=0,5$.

Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος: πιθανότητα, ομοίως 0,5.

Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα: πιθανότητα $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$.

Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός: πιθανότητα 0,5.

Άσκηση 5

Να μοντελοποιήσετε το πείραμα τύχης της εφαρμογής 2, χρησιμοποιώντας το μέτρο του κάθε τόξου σε rad αντί σε μοίρες, για να ορίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ω_i. Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Μετατρέπουμε τις μοίρες σε ακτίνια (rad) για κάθε ένα από τα τόξα.

Όλος ο κύκλος αντιστοιχεί σε 2π ακτίνια (rad).

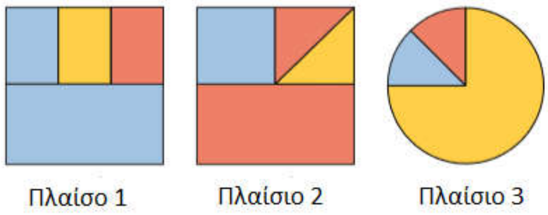
Επίσης για να υπολογίσουμε μια γωνία (ή ένα τόξο) σε ακτίνια βρίσκουμε τον λόγο της γωνίας (ή του τόξου) προς τις 360° (κύκλος) και πολλαπλασιάζουμε επί 2π, δηλαδή επί τον κύκλο σε ακτίνια.

Χρώμα	Μοίρες	Ακτίνια (rad)	Πιθανότητα αντίστοιχου ενδεχομένου
Πράσινο	60°	$\frac{60^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi=\frac{1}{6}\cdot 2\pi=\frac{\pi}{3}$	$p_1=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{1}}=\frac{1\cdot\pi}{3\cdot 2\pi}=\frac{1}{6}$
Γαλάζιο	100°	$\frac{100^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi=\frac{5\pi}{9}$	$p_2=\frac{\frac{5\pi}{9}}{2\pi}=\frac{5\pi}{9\cdot 2\pi}=\frac{5}{18}$
Κίτρινο	40°	$\frac{40^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi=\frac{2\pi}{9}$	$p_3=\frac{\frac{2\pi}{9}}{2\pi}=\frac{2\pi}{9\cdot 2\pi}=\frac{1}{9}$
Γκρι	110°	$\frac{110^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi=\frac{11\pi}{18}$	$p_4=\frac{\frac{11\pi}{18}}{2\pi}=\frac{11\pi}{18\cdot 2\pi}=\frac{11}{36}$
Κόκκινο	50°	$\frac{50^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi=\frac{5\pi}{18}$	$p_5=\frac{\frac{5\pi}{18}}{2\pi}=\frac{5\pi}{18\cdot 2\pi}=\frac{5}{36}$

Παρατηρούμε ότι οι πιθανότητες των ενδεχομένων p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 είναι ίδιες, ανεξάρτητα αν η μοντελοποίηση θα γίνει χρησιμοποιώντας μοίρες ή ακτίνια (rad).

Άσκηση 6

Κάθε ένα από τα παρακάτω τρία σχήματα (δύο τετράγωνα και ένα κυκλικό) εμφανίζεται στην οθόνη ενός από τρεις ίδιους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.



Ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή επιλέγει τυχαία και χρωματίζει με μαύρο χρώμα ένα pixel μέσα στο σχήμα. Σε κάθε πλαίσιο ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, το pixel που θα χρωματιστεί:

α) Να ήταν κόκκινο;

β) Να ήταν γαλάζιο ή κίτρινο;

γ) Να μην ήταν κόκκινο;

<u>Λύση</u>

Μοντελοποιούμε το πείραμα τύχης ως εξής, σε κάθε πλαίσιο:

Ω: δειγματικός χώρος το σύνολο των pixel στο σχήμα

A_X: το ενδεχόμενο «το pixel που γίνεται μαύρο ήταν χρώματος X»

$$P(A_x) = \frac{\text{εμβαδόν μέρους σχήματος με χρώμα X}}{\text{συνολικό εμβαδόν σχήματος}} = \text{μέρος του συνολικού εμβαδού με χρώμα X}$$

<u>Για το πλαίσιο 1</u>

Προσεγγιστικά, μπορούμε να υποθέσουμε (όπως στο παρακάτω σχήμα) ότι το πλαίσιο 1 αποτελείται από 6 ίσα ορθογώνια, από τα οποία τα 4 είναι γαλάζια, το ένα κόκκινο και το ένα κίτρινο.

Οπότε, η επιφάνεια κόκκινου χρώματος είναι το $\frac{1}{6}$ του πλαισίου 1,

η επιφάνεια κίτρινου χρώματος είναι το $\frac{1}{6}$ του πλαισίου 1, και

η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι τα $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ του πλαισίου 1.

Έτσι έχουμε:

α) $P(A_{ΚΟΚΚΙΝΟ})=\frac{1}{6}$.

β) $P(A_{ΚΙΤΡΙΝΟ})=\frac{1}{6}$ και $P(A_{ΓΑΛΑΖΙΟ})=\frac{2}{3}$. Άρα, από τον απλό προσθετικό νόμο είναι:

$$P(A_{ΓΑΛΑΖΙΟ}\cup A_{ΚΙΤΡΙΝΟ})=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

γ) Το ενδεχόμενο «το pixel που γίνεται μαύρο δεν ήταν κόκκινο» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το pixel που γίνεται μαύρο ήταν γαλάζιο ή κίτρινο», του οποίου η πιθανότητα έχει υπολογιστεί στο β) και είναι ίση με $\frac{5}{6}$.

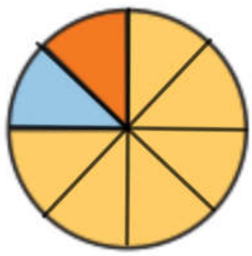
<u>Για το πλαίσιο 2</u>

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

Η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι το $\frac{1}{4}$ του πλαισίου 2, του κίτρινου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 2 και του κόκκινου χρώματος είναι τα $\frac{5}{8}$ του πλαισίου 2. Άρα, οι απαντήσεις στα ερωτήματα της άσκησης είναι:

α) $\frac{5}{8}$, **β)** $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$, **γ)** $\frac{3}{8}$.

<u>Για το πλαίσιο 3</u>



Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε:

Η επιφάνεια γαλάζιου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 3.,

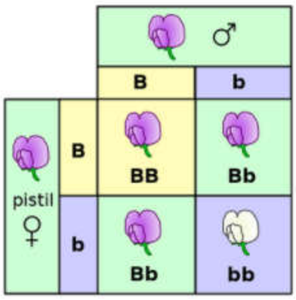
του κόκκινου χρώματος είναι το $\frac{1}{8}$ του πλαισίου 3 και του

κίτρινου χρώματος είναι τα $\frac{3}{4}$ του πλαισίου 3.

Άρα, οι απαντήσεις στα ερωτήματα της άσκησης είναι:

α) $\frac{1}{8}$, **β)** $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$, **γ)** $\frac{7}{8}$.

Άσκηση 7



Ο βοτανολόγος Γκρέγκορ Μέντελ, στα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα, πειραματίστηκε με την εμφάνιση των κληρονομικών χαρακτηριστικών των μοσχομπίζελων, διατυπώνοντας τους νόμους της Μενδελικής κληρονομικότητας. Από τα πειράματά του συμπέρανε τον νόμο της ομοιομορφίας, σύμφωνα με τον οποίο το χρώμα του άνθους μοσχομπίζελου είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο «κληρονομικών παραγόντων» που σήμερα ονομάζονται αλληλόμορφα γονίδια. Για το χρώμα υπάρχουν δύο γονίδια: το επικρατές B, που αντιστοιχεί στο ιώδες και το υπολειπόμενο b που αντιστοιχεί στο λευκό χρώμα.
Σε ένα φυτό, το χρώμα του άνθους του οφείλεται σε ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το πατρικό μοσχομπίζελο κι ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το μητρικό. Όπως φαίνεται στον πίνακα για να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος, πρέπει και τα δύο αλληλόμορφα γονίδια να είναι τύπου b. Σε κάθε άλλη περίπτωση προκύπτει μοσχομπίζελο με ιώδες άνθος.
Διασταυρώνουμε δύο μοσχομπίζελα: ένα τύπου BB και ένα με λευκό άνθος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος:
α) στην 1η (θυγατρική) γενιά.
β) στην 2η (θυγατρική) γενιά.

<u>Λύση</u>
α) Το λευκό μοσχομπίζελο της πατρικής γενιάς έχει κληρονομήσει δύο γονίδια b. Άρα είναι τύπου bb. Διασταυρώνουμε τα μοσχομπίζελα και στα αχρωμάτιστα κελιά του πίνακα φαίνονται οι πιθανοί τύποι των μοσχομπίζελων 1ης θυγατρικής γενιάς:

	B	B
b	Bb	Bb
b	Bb	Bb

Ας θεωρήσουμε το πείραμα τύχης «διασταυρώνουμε τα δύο μοσχομπίζελα τύπων BB και bb και γράφουμε τον τύπο ενός μοσχομπίζελου που μπορεί να προκύψει στην 1η θυγατρική γενιά». Ο δ.χ. του πειράματος τύχης είναι:
Ω = {Bb, Bb, Bb, Bb}
Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου το μοσχομπίζελο να είναι bb (δηλαδή λευκό) είναι 0. Το ενδεχόμενο είναι αδύνατο.
β) Συνεχίζοντας στη 2η θυγατρική γενιά (που προκύπτει από διασταυρώσεις της 1ης), έχουμε:

	B	b
B	BB	Bb
B	Bb	bb

Για το πείραμα τύχης «διασταυρώνουμε τα δύο μοσχομπίζελα τύπων Bb και Bb (1ης γενιάς) και γράφουμε τον τύπο ενός μοσχομπίζελου που μπορεί να προκύψει στην 2η θυγατρική γενιά». Ο δ.χ. του πειράματος τύχης είναι:

Ω = {BB, Bb, Bb, bb}

Άρα, η πιθανότητα του ενδεχομένου το μοσχομπίζελο να είναι bb (δηλ. λευκό) είναι $\frac{1}{4}$.

Άσκηση 8

Σε ένα μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα από τα παιδιά που γεννήθηκαν το 30% ήταν αγόρια και το 70% ήταν κορίτσια. Με ποιες από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε;

α) Σε αυτό το μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα γεννήθηκαν περισσότερα κορίτσια.

β) Αν ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί επιλέξει αυτό το μαιευτήριο για τον τοκετό, τότε η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι.

γ) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από τον κατάλογο των νεογέννητων του προηγούμενου μήνα σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,3.

δ) Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη από την λίστα των παιδιών που έχουν γεννηθεί σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι 0,7.

Λύση

α) Σωστό,

β) Λάθος (δεν προκύπτει από τα δεδομένα τρόπος να τεκμηριώσουμε ότι η γέννηση αγοριού ή κοριτσιού είναι πιθανότερη),

γ) Σωστό,

δ) Λάθος (δεν αναφέρεται στον προηγούμενο μήνα).

Άσκηση 9

Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 κόκκινα και 6 πράσινα σφαιρίδια. Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα; Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα πράσινα ήταν περισσότερα από τα κόκκινα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου.

Λύση

Στην κάλπη υπάρχουν συνολικά 11 σφαιρίδια. Η πιθανότητα να βγάλουμε κόκκινο σφαιρίδιο είναι $\frac{5}{11}$, ενώ η πιθανότητα να βγάλουμε πράσινο σφαιρίδιο είναι $\frac{6}{11}$.

Βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την κάλπη. Το ενδεχόμενο «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι ίδιο με το ενδεχόμενο «το σφαιρίδιο που βγάλαμε είναι πράσινο».

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{11}$.

Για το δεύτερο μέρος της άσκησης, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν ν κόκκινα σφαιρίδια, με ν>5 (εφόσον τα σφαιρίδια είναι περισσότερα από πριν). Τότε τα πράσινα σφαιρίδια είναι ν+1. Το σύνολο των σφαιριδίων είναι 2ν+1.

Άρα η πιθανότητα να εξάγουμε τυχαία ένα πράσινο σφαιρίδιο από την κάλπη είναι $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$.

Επομένως η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» είναι $\frac{\nu+1}{2\nu+1}$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου σε αυτή την περίπτωση θα άλλαζε κατά $\frac{\nu+1}{2\nu+1}-\frac{6}{11}=$

$$=\frac{11(\nu+1)-6(2\nu+1)}{11(2\nu+1)}=\frac{11\nu+11-12\nu-6}{11(2\nu+1)}=\frac{5-\nu}{11(2\nu+1)}.$$

Εφόσον $\nu>5 \Leftrightarrow \nu-5>0 \Leftrightarrow 5-\nu<0$. Άρα $\frac{5-\nu}{11(2\nu+1)}<0$.

Επομένως, σε αυτό το πείραμα τύχης, η πιθανότητα του ενδεχομένου «στην κάλπη απομένει ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα» θα μειωνόταν, αν αυξανόταν ο αριθμός των σφαιρών.

Άσκηση 10

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: έρχεται το πολύ μία φορά Κεφαλή.

Β: έρχεται τουλάχιστον μία φορά Κεφαλή.

Γ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι διαφορετικό.

Δ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο.

α) Να αποδείξετε ότι P(A)=P(B) και ότι P(Γ)=P(Δ).

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$.

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ', $\Gamma\cap\Delta$, $\Gamma\cup\Delta$, $B\cup\Gamma'$.

<u>Λύση</u>

Ένας δ.χ. του πειράματος τύχης είναι Ω = {ΚΚ, ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ}.

Είναι Α = {ΓΚ, ΚΓ, ΓΓ}, Β = {ΚΚ, ΓΚ, ΚΓ}, Γ= {ΓΚ, ΚΓ}, Δ = {ΚΚ, ΓΓ}.

α) Τα Α και Β έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, άρα ισχύει P(A) = P(B). Ομοίως, για τα ενδεχόμενα Γ και Δ.

β) $A\cup B=\{KK,\Gamma K,K\Gamma,\Gamma\Gamma\}=\Omega$, $A\cap B=\{\Gamma K,K\Gamma\}$, $A-B=\{\Gamma\Gamma\}$.

Άρα $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$, $P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(A - B) = \frac{1}{4}$.

γ) $\Gamma' = \{KK, \Gamma\Gamma\}$, $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$, $\Gamma \cup \Delta = \Omega$, $B \cup \Gamma' = \{KK, \Gamma K, K\Gamma, \Gamma\Gamma\} = \Omega$.

Άρα $P(\Gamma') = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(\Gamma \cap \Delta) = P(\varnothing) = 0$, $P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Omega) = 1$, $P(B \cup \Gamma') = 1$.

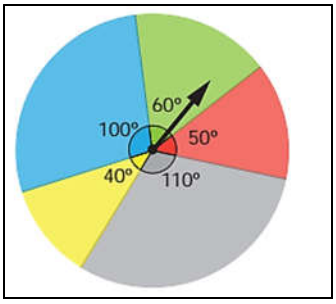
Πρόσθετο υλικό

Άσκηση 1

Από τον ορισμό της πιθανότητας (κλασικό και αξιωματικό) γνωρίζετε ότι $A = \varnothing \Rightarrow P(A) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο; Μπορεί να υπάρχει ενδεχόμενο Α ενός δ.χ., που να μην είναι κενό και να ισχύει $P(A) = 0$;

Λύση

Καταρχάς, ο αξιωματικός ορισμός δεν αποκλείει να αποδώσουμε σε κάποιο/α ενδεχόμενο/α πιθανότητα 0. Έτσι, θα μπορούσε να είναι P(A)=0, χωρίς το Α να είναι το κενό σύνολο.



Ως παράδειγμα, ας φανταστούμε το πείραμα με τον δίσκο της εφαρμογής 2. Μοντελοποιούμε το πείραμα ως εξής:

Ως δειγματικό χώρο θεωρούμε το σύνολο όλων των δυνατών θέσεων του βέλους. Υποσύνολα του δ.χ. είναι τα ενδεχόμενα

Α: "το βέλος σταματάει στο πράσινο"

Β: "το βέλος σταματάει στο γαλάζιο"

Γ: "το βέλος σταματάει στο κίτρινο"

Δ: "το βέλος σταματάει στο γκρι"

Ε: "το βέλος σταματάει στο κόκκινο"

Αποδίδουμε ως πιθανότητα καθενός από αυτά τα ενδεχόμενα το κλάσμα που δείχνει το μέρος του κύκλου που καλύπτεται με το συγκεκριμένο χρώμα:

$P(A) = \frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{100°}{360°} = \frac{5}{18}$, $P(\Gamma) = \frac{40°}{360°} = \frac{1}{9}$, $P(\Delta) = \frac{110°}{360°} = \frac{11}{36}$, $P(E) = \frac{50°}{360°} = \frac{5}{36}$

Η μοντελοποίηση αυτή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του αξιωματικού ορισμού.

Σε αυτό το παράδειγμα, το ενδεχόμενο "το βέλος σταματάει στη διαχωριστική γραμμή μεταξύ του κόκκινου και του πράσινου" δεν είναι κενό, αλλά η πιθανότητα να συμβεί είναι 0.

Άσκηση 2

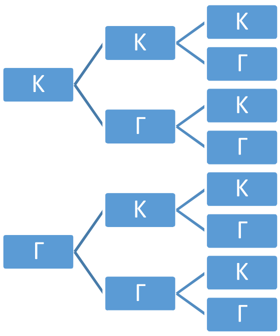
α) Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι (πείραμα τύχης) με αμερόληπτο κέρμα, για δύο παίκτες, την Άννα και τον Βασίλη.

Η Άννα κάνει 2 ρίψεις του κέρματος, στη συνέχεια κάνει 1 ρίψη ο Βασίλης και καταγράφεται το αποτέλεσμα των ρίψεων. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει περισσότερες κεφαλές (Κ) από τον Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα; Είναι δίκαιο το παιχνίδι;

β) Τι θεωρείτε ότι θα συνέβαινε στην πιθανότητα να κερδίσει η Άννα στο προηγούμενο παιχνίδι, αν γίνονταν περισσότερες ρίψεις του νομίσματος (η Άννα κάνει ν+1 ρίψεις και ο Βασίλης ν ρίψεις);

Λύση

α) Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα οι δύο πρώτες ρίψεις είναι εκείνες που κάνει η Άννα και η τρίτη είναι του Βασίλη.



Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{ККК, ККΓ, КΓК, КΓΓ, ΓКК, ΓКΓ, ΓΓК, ΓΓΓ\}$

Το ενδεχόμενο "κερδίζει η Άννα" είναι $A = \{ККК, ККΓ, КΓΓ, ΓКΓ\}$

Άρα, P(A)=0,5. Οπότε, το παιχνίδι είναι δίκαιο.

β) Στην περίπτωση που η Άννα κάνει ν+1 ρίψεις και ο Βασίλης ν ρίψεις, θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: "η Άννα φέρνει περισσότερα Κ από τον Βασίλη", και

Β: "η Άννα φέρνει περισσότερα Γ από τον Βασίλη".

Στο τέλος του παιχνιδιού, εφόσον η Άννα κάνει περισσότερες ρίψεις από τον Βασίλη, σίγουρα ένα από τα Α ή Β θα έχει συμβεί (δεν μπορεί η Άννα να μην ξεπέρασε ούτε τα Κ ούτε τα Γ του Βασίλη). Οπότε $A \cup B = \Omega$.

Επιπλέον, δεν μπορεί να συμβούν και τα δύο, εφόσον η Άννα κάνει μόνο μία περισσότερη ρίψη. Άρα, τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα: $A \cap B = \varnothing$.

Προφανώς, τα Α και Β έχουν ίσες πιθανότητες να συμβούν (λόγω συμμετρίας).

Οπότε τελικά $P(A) = P(B = \frac{1}{2}$. Δηλαδή το ενδεχόμενο να κερδίσει η Άννα έχει πιθανότητα 0,5, που σημαίνει ότι το παιχνίδι είναι δίκαιο.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3 : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Το 50% των δωματίων ενός ξενοδοχείου έχουν τζάκι, το 20% έχουν καλοριφέρ και το 10% και τζάκι και καλοριφέρ. Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο του ξενοδοχείου.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το δωμάτιο που επιλέξαμε:

α) να μην έχει τζάκι,

β) να μην έχει ούτε τζάκι ούτε καλοριφέρ,

γ) να έχει μόνο τζάκι;

Λύση

Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο. Ονομάζουμε τα εξής ενδεχόμενα:

A: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι».

B: «Το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει καλοριφέρ».

Τότε P(A) = 0,5 και P(B) = 0,2.

Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει τζάκι και ούτε καλοριφέρ» γράφεται ως $A \cap B$ και είναι $P(A\cap B)=0,1$.

α) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει τζάκι» γράφεται ως A' και $P(A')=1-0,5=0,5$ (από Π1).

β) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε δεν έχει ούτε τζάκι, ούτε καλοριφέρ» γράφεται ως $(A\cup B)'$ και $P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$ (από Π1).

Πρέπει να βρούμε την $P(A\cup B)$ από Π4:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, άρα $P(A\cup B)=0,5+0,2-0,1=0,6$.

Έτσι, θα έχουμε $P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-0,6=0,4$.

γ) Το ενδεχόμενο «το δωμάτιο που επιλέξαμε έχει μόνο τζάκι» γράφεται ως $A-B$.

Από Π2: $P(A)=P(A\cap B)+P(A-B)$, άρα $0,5=0,1+P(A-B)\Leftrightarrow P(A-B)=0,4$.

Άσκηση 2

Ας υποθέσουμε ότι A και B είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

α) Αν ισχύει ότι $P(A)=0,8$ και $P(B)=0,1$. Ισχύει ότι $B\subseteq A$, γιατί $P(B)\leq P(A)$.

β) Αν $P(A)=0,3$, $P(B)=0,4$ και $P(A\cup B)=0,6$, τότε τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Αν $P(A)=0,4$ και $P(B)=0,6$, τότε το συμπληρωματικό του Α είναι το Β.

δ) Ισχύει πάντα ότι $P(A)+P(B)\leq 1$.

ε) Ισχύει πάντα ότι $P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1$.

στ) Αν ισχύει $P(A)+P(B)=1,5$, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

ζ) Αν ισχύει $P(A)+P(B)<1$, τότε τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

η) Ισχύει ότι $P(A\cap B)\leq P(A)$.

<u>Λύση</u>

α) Λάθος. Δεν είναι απαραίτητα το $B\subseteq A$. Π.χ. θα μπορούσαν τα Α και Β να είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Ας φανταστούμε το πείραμα τύχης "επιλέγομε τυχαία έναν φυσικό αριθμό από τους 1, 2, 3, ..., 10". Είναι Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Αν ονομάσουμε Α={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} και Β={9}, είναι $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,1$, χωρίς να είναι $B \subseteq A$.

β) Σωστή.

Από Π4 έχουμε ότι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, άρα $0,6=0,3+0,4-P(A\cap B)\Leftrightarrow$ $P(A\cap B)=0,1$, επομένως τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Λάθος. Θα μπορούσε να είναι σωστή μόνο στην περίπτωση που τα Α και Β ήταν ασυμβίβαστα. Για παράδειγμα, στο πείραμα του (α), αν ονομάσουμε Γ={1, 2, 3, 4} και Δ={1, 2, 5, 6, 9, 10}, είναι $P(\Gamma)=0,4$ και $P(\Delta)=0,6$ χωρίς τα Γ και Δ να είναι συμπληρωματικά.

δ) Λάθος. Στην περίπτωση που τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα μπορεί να ισχύει $P(A)+P(B)>1$. Π.χ. αν $P(A)=0,6$, $P(B)=0,7$ και $P(A\cap B)=0,5$, τότε από Π4 έχουμε: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cup B)=0,6+0,7-0,5=0,8$.

Σε αυτή την περίπτωση $P(A)+P(B)=1,3$.

ε) Σωστή. Από Π4 ισχύει $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ και $P(A\cup B)\leq 1$ (από τον ορισμό της πιθανότητας). Άρα $P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1$.

στ) Σωστή. Στην περίπτωση αυτή τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα. Γενικότερα, αν $P(A)+P(B)>1$, τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα, εφόσον αν ήταν ασυμβίβαστα θα ήταν $P(A\cup B) = P(A) + P(B) > 1$, που είναι άτοπο .

ζ) Λάθος. Δεν είναι απαραίτητο να είναι ασυμβίβαστα. Π.χ. βλέπε β), όπου P(A)+P(B)=0,7, ωστόσο τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

η) Σωστή, λόγω της Π3 καθώς $A\cap B\subseteq A$.

Άσκηση 3

Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα με την εφαρμογή 2, αν αντί για τα ποσοστά που δίνονται, γνωρίζετε αυτή τη φορά ότι το Λύκειο έχει συνολικά 120 μαθητές/τριες, από τους/τις οποίους/ες οι 32 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, οι 28 στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές/τριες συμμετέχουν και στις δύο ομάδες.

Λύση

Αν Α είναι το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην θεατρική ομάδα» και Β «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην ομάδα στίβου», τότε, $P(A)=\frac{32}{120}=\frac{4}{15}$ και $P(B)=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}$.

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει και στις δύο ομάδες» είναι το $A\cap B$ και από τα δεδομένα του προβλήματος $P(A\cap B)=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$.

α) Από το Π4, η πιθανότητα του ενδεχομένου $A\cup B$, είναι $P(A\cup B)=\frac{4}{15}+\frac{7}{30}-\frac{2}{15}=$
$=\frac{8}{30}+\frac{7}{30}-\frac{4}{30}=\frac{11}{30}$.

β) Από Π2 η πιθανότητα του ενδεχομένου $A-B$ είναι $\frac{4}{15}=\frac{2}{15}+P(A-B)\Leftrightarrow$
$P(A-B)=\frac{4}{15}-\frac{2}{15}=\frac{2}{15}$.

γ) Πρώτα θα βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου», δηλαδή του $B-A$, από Π2:

$P(B)=P(A\cap B)+P(B-A)\Leftrightarrow \frac{7}{30}=\frac{2}{15}+P(B-A)\Leftrightarrow P(B-A)=\frac{3}{30}=0,1$

Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες» είναι η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων $A-B$ και $B-A$.

Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο $P((A-B)\cup(B-A))=P(A-B)+P(B-A)\Leftrightarrow$
$P((A-B)\cup(B-A))=\frac{2}{15}+0,1=\frac{4}{30}+\frac{3}{30}=\frac{7}{30}$.

δ) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια δε συμμετέχει σε καμία ομάδα» είναι το $(A\cup B)'$ και από Π1, $P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$.

Άσκηση 4

Από τους/τις μαθητές/τριες της Β΄ τάξης ενός Λυκείου το 55% είναι μαθήτριες, το 40% παίζουν μπάσκετ και το 10% είναι μαθήτριες που παίζουν μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες να είναι:

α) μαθήτρια ή να παίζει μπάσκετ,

β) μαθήτρια και να μην παίζει μπάσκετ,

γ) μαθητής και να παίζει μπάσκετ,

δ) μαθητής ή να παίζει μπάσκετ.

Λύση

Επιλέγουμε τυχαία ένα/μια μαθητή/τρια. Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

K: «μαθήτρια» με P(K)=0,55.

M: «ο/η μαθητής/τρια παίζει μπάσκετ» με P(M)=0,4.

«μαθήτρια που παίζει μπάσκετ»: $K \cap M$ με $P(K \cap M) = 0,1$.

α) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $K \cup M$. Από Π4 έχουμε:

$P(K \cup M) = P(K) + P(M) - P(K \cap M) \Leftrightarrow P(K \cup M) = 0,55 + 0,4 - 0,1 = 0,85$.

β) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $K - M$. Από Π2 έχουμε:

$P(K) = P(K \cap M) + P(K - M) \Leftrightarrow 0,55 = 0,1 + P(K - M) \Leftrightarrow P(K - M) = 0,45$.

γ) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής και να παίζει μπάσκετ», το οποίο είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο «να μην είναι κορίτσι και να παίζει μπάσκετ», άρα $K - M$.

Από Π2: $P(M) = P(M \cap K) + P(M - K) \Leftrightarrow 0,4 = 0,1 + P(M - K) \Leftrightarrow P(M - K) = 0,3$.

Ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε το ενδεχόμενο «μαθητής και να παίζει μπάσκετ» είναι ο εξής: $K' \cap M$. Άρα $P(K' \cap M) = 0,3$.

δ) Θα βρούμε πρώτα την πιθανότητα να είναι μαθητής, δηλαδή K΄, με τη βοήθεια του Π1: P(K΄) = 1 – P(K) = 1 – 0,55 = 0,45.

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «μαθητής ή να παίζει μπάσκετ», δηλαδή του ενδεχομένου $K' \cup M$. Άρα, $P(K' \cup M) = P(K') + P(M) - P(K' \cap M)$.

Με αντικατάσταση έχουμε $P(K' \cup M) = 0,45 + 0,4 - 0,3 = 0,55$.

Άσκηση 5

Όλοι οι κάτοικοι μιας μικρής επαρχιακής πόλης έχουν συμβόλαιο κινητού τηλεφώνου. Το 47% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την εταιρεία FONATEL, το 35% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE. Παίρνουμε τυχαία τηλέφωνο έναν κάτοικο της πόλης. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο δεν έχει συμβόλαιο με καμία από τις FONATEL και TELEVIBE» είναι 23%.

Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο:

α) να έχει συμβόλαιο με την FONATEL ή με την TELEVIBE,

β) να έχει συμβόλαιο και με τις δύο εταιρείες.

Λύση

Για το πείραμα τύχης που περιγράφεται στην άσκηση έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:

F: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την FONATEL»

T: «ο κάτοικος που πήραμε έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE»

«ο κάτοικος που πήραμε δεν έχει συμβόλαιο με καμιά από τις FONATEL και TELEVIBE»: $(F \cup T)'$.

Άρα $P(F) = 0,47$, $P(T) = 0,35$ και $P((F \cup T)') = 0,23$.

α) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $F \cup T$.

Από Π1: $P(F \cup T) = 1 - P((F \cup T)') = 1 - 0,23 = 0,77$.

β) Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $F \cap T$.

Από Π4, $P(F \cap T) = P(F) + P(T) - P(F \cup T)$ με αντικατάσταση έχουμε:

$P(F \cap T) = 0,47 + 0,35 - 0,77 = 0,05$.

Άσκηση 6

Από τον πληθυσμό μιας πόλης το 42% δεν έχουν κάνει ποτέ σκι το 58% δεν έχουν ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο, αλλά το 29% έχουν ήδη κάνει σκι και έχουν ταξιδέψει με αεροπλάνο. Αν πάρουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει κάνει ποτέ σκι και να μην έχει ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο;

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

S: «ο κάτοικος έχει κάνει σκι»

A: «ο κάτοικος έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»

«ο κάτοικος έχει κάνει σκι και έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο»: $S \cap A$

Από τα δεδομένα έχουμε $P(S') = 0,42$, $P(A') = 0,58$ και $P(S \cap A) = 0,29$.

Ζητούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος δεν έχει κάνει σκι, ούτε έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο», δηλαδή $(S \cup A)'$.

Αρχικά βρίσκουμε τις πιθανότητες $P(S) = 1 - P(S') = 1 - 0,42 = 0,58$ και $P(A) =$

$= 1 - P(A') = 1 - 0,58 = 0,42$.

Άρα $P(S \cup A) = P(A) + P(S) - P(S \cap A) = 0,42 + 0,58 - 0,29 = 0,71$.

Επομένως $P((S \cup A)') = 1 - P(S \cup A) = 1 - 0,71 = 0,29$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4 : ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Μέρος Α΄: Διατάξεις – Μεταθέσεις

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Οι διοργανωτές αγώνων δρόμου 5 και 10 χιλιομέτρων, που θα γίνουν την ίδια ημέρα, θέλουν να δώσουν έναν μοναδικό κωδικό σε κάθε συμμετέχοντα. Επίσης, θα ήθελαν κάθε κωδικός συμμετέχοντα στα 5 χιλιόμετρα να είναι ευδιάκριτος από τον κωδικό ενός συμμετέχοντα στα 10 χιλιόμετρα. Στα 5 χιλιόμετρα υπάρχουν 2.573 συμμετέχοντες, ενώ στα 10 χιλιόμετρα υπάρχουν 1.113 συμμετέχοντες. Αποφασίστηκε για τα 5 χιλιόμετρα να δοθεί σε κάθε συμμετέχοντα ένας κωδικός από τρία διατεταγμένα σύμβολα, ώστε:
Το πρώτο και το δεύτερο να είναι τυχαίο σύμφωνο από το ελληνικό αλφάβητο και το τρίτο να είναι ένας τυχαίος μονοψήφιος αριθμός, π.χ. ΝΜ2.
α) Επαρκούν οι διατεταγμένες τριάδες αυτές για όλους τους συμμετέχοντες στα 5 χιλιόμετρα;
β) Τι θα προτείνατε στους διοργανωτές να κάνουν για τα 10 χιλιόμετρα;

<u>Λύση</u>
α) Οι διατεταγμένες τριάδες είναι πλήθους $17 \cdot 17 \cdot 10 = 2890$ (εφόσον υπάρχουν 17 σύμφωνα στο ελληνικό αλφάβητο), άρα επαρκούν, καθώς οι συμμετέχοντες στα 5 χιλιόμετρα είναι 2573.
β) Μια απλή λύση θα ήταν να προστεθεί ένα ακόμα σύμβολο και οι κωδικοί στα 10 χιλιόμετρα να είναι τετραψήφιοι. Όμως έτσι δημιουργούνται πολλοί κωδικοί χωρίς να χρειάζονται.
Μια άλλη λύση θα ήταν να χρησιμοποιηθούν κωδικοί με τρία διατεταγμένα σύμβολα για τους δύο αγώνες, ως εξής: στις δύο πρώτες θέσεις αξιοποιούνται όλα τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου και για το τρίτο σύμβολο να χρησιμοποιηθούν τα ψηφία 0 έως 7 για τους αγώνες των 5 χιλιομέτρων και τα σύμβολά 8 και 9 για τους αγώνες των 10 χιλιομέτρων.
Συνεπώς για τα 5 χιλιόμετρα υπάρχουν $24 \cdot 24 \cdot 8 = 4608$ κωδικοί, ενώ για τον αγώνα των 10 χιλιομέτρων υπάρχουν $24 \cdot 24 \cdot 2 = 1152$ κωδικοί.

Άσκηση 2

Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα γράμματα Α, Ε, Ε, Θ, Ι, Υ το ένα μετά από το άλλο; Ποια είναι η πιθανότητα, αν τοποθετήσουμε τα γράμματα σε τυχαία σειρά, να σχηματιστεί η λέξη ΕΥΘΕΙΑ;

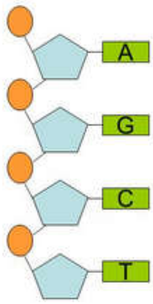
Λύση

Πρόκειται για μεταθέσεις των 6 γραμμάτων, οι οποίες έχουν πλήθος $6!=$
$=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$. Άρα τοποθετούνται με 720 τρόπους.
Από όλους αυτούς τους τρόπους, 2 μόνο μας δίνουν τη λέξη ευθεία, επειδή έχουμε 2 Ε. Παρακάτω, στις κενές θέσεις τοποθετούνται τα Ε, άρα έχουμε 2 τρόπους να τα τοποθετήσουμε.

_ Υ Θ _ Ι Α

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{2}{720}=\frac{1}{360}$.

Άσκηση 3



Οι αζωτούχες βάσεις που μπορεί να έχει ένα νουκλεοτίδιο είναι η Αδενίνη (A), η Γουανίνη (G), η Κυτοσίνη (C) και η Θυμίνη (T). Τα νουκλεοτίδια, ανάλογα με την σειρά τους σε τριάδες, καθορίζουν ποιο αμινοξύ θα τοποθετηθεί στην αντίστοιχη θέση κατά τη σύνθεση των πρωτεϊνών. Οι τριάδες αυτές ονομάζονται κωδικόνια.

α) Πόσα διαφορετικά κωδικόνια μπορούν να σχηματιστούν;

β) Συνολικά τα κωδικόνια αντιστοιχούν στο σχηματισμό 20 αμινοξέων. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κωδικόνιο είναι ίδια η πιθανότητα να αντιστοιχεί σε ένα από τα 20 αμινοξέα (θα χρειαστεί να αναζητήσετε πληροφορίες για την αντιστοιχία κωδικονίων και αμινοξέων για να απαντήσετε);

Λύση

α) Το πλήθος των κωδικονίων είναι το πλήθος των διατάξεων των 4 ανά 3 με επανάληψη. Άρα, $4^3=64$.

β) Αναζητώντας την αντιστοιχία κωδικονίων και αμινοξέων, βλέπουμε ότι σε κάποια αμινοξέα αντιστοιχεί 1 κωδικόνιο, σε άλλα 2 διαφορετικά κωδικόνια, 3 διαφορετικά κωδικόνια, 4 διαφορετικά κωδικόνια και 6 διαφορετικά κωδικόνια. Άρα επιλέγοντας τυχαία 1 κωδικόνιο η πιθανότητα αυτό να αντιστοιχεί σε ένα αμινοξύ, εξαρτάται από το ποιο είναι το αμινοξύ. Μπορεί να είναι $\frac{1}{64}$ ή $\frac{1}{32}$ ή $\frac{3}{64}$ ή $\frac{1}{16}$ ή $\frac{3}{32}$.

Άσκηση 4

Αν κάποιος διαθέτει 2 μπουφάν (ένα μαύρο κι ένα μπλε), 4 παντελόνια, 3 μπλούζες, 10 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Αν ένας επιλέξει τυχαία έναν από αυτούς τους τρόπους για να ντυθεί φορώντας ένα μπουφάν, ένα παντελόνι, μία μπλούζα, ένα ζευγάρι κάλτσες και ένα ζευγάρι παπούτσια, ποια είναι η πιθανότητα να φοράει το μπλε μπουφάν;

Λύση

Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση είναι $2\cdot 4\cdot 3\cdot 10\cdot 3=720$ τρόποι.

Οι τρόποι για να φοράει το μπλε μπουφάν είναι $4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3 = 360$.

Άρα οι πιθανότητες να φοράει κανείς το μπλε μπουφάν είναι $\frac{360}{720} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 5

Αν ρίξουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 4 φορές ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 4 διαφορετικά αποτελέσματα;

Λύση

Κάθε ρίψη του αμερόληπτου ζαριού έχει 6 δυνατές εκβάσεις. Κάθε αποτέλεσμα του πειράματος τύχης των 4 διαδοχικών ρίψεων είναι μια τετράδα αριθμών.

Άρα, το πλήθος των δυνατών εκβάσεων του πειράματος τύχης είναι $6^4 = 1296$.

Το πλήθος των εκβάσεων που οι τετράδες αποτελούνται από διαφορετικούς αριθμούς είναι το πλήθος των διατάξεων των 6 ανά 4 χωρίς επανάληψη.

Άρα $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{360}{1296}$.

Άσκηση 6

α)Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό;

β) Από το σύνολο των πινακίδων που περιγράφονται στο ερώτημα (α), μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκείνες που τα γράμματά τους ανήκουν και στο λατινικό αλφάβητο. Αν επιλέξουμε τυχαία μία πινακίδα του ερωτήματος, (α) ποια είναι η πιθανότητα να είναι κατάλληλη προς χρήση;

Λύση

α) Ο τετραψήφιος αριθμός μπορεί να είναι ακόμα και ο 0000.

Επομένως, τα τρία κεφαλαία γράμματα μπορούν να σχηματιστούν με $24^3 = 13824$ τρόπους, ενώ ο αριθμός με $10^4 = 10000$.

Άρα το πλήθος των πινακίδων κυκλοφορίας είναι $13824 \cdot 10000 = 138.240.000$.

β) Από τα γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου εκείνα που δεν ανήκουν στο λατινικό αλφάβητο είναι τα Γ, Δ, Θ, Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ, Ω. Άρα το πλήθος των γραμμάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι 24 – 10 = 14.

Άρα, τα τρία κεφαλαία γράμματα μπορούν να σχηματιστούν με $14^3 = 2744$.

Συνεπώς το πλήθος των πινακίδων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι $2744 \cdot 10000 = 27.440.000$.

Άρα, η πιθανότητα μια πινακίδα να είναι κατάλληλη προς χρήση είναι $\frac{27440000}{138240000} \simeq 0,2$.

Άσκηση 7

Ο Θανάσης, ο Μιχάλης, ο Κώστας, ο Αντρέι κι ο Δημήτρης είναι οι παίκτες της σχολικής ομάδας μπάσκετ των αγοριών του Γ1 και ο προπονητής της ομάδας πρόκειται να τους δώσει τις εμφανίσεις τους για τους σχολικούς αγώνες.

α) Οι διαθέσιμες εμφανίσεις έχουν τυπωμένα τα νούμερα 7, 13, 15, 20 και 27. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν οι εμφανίσεις στους μαθητές; Αν οι εμφανίσεις μοιραστούν τυχαία στους παίκτες, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7; Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7 και να μην πάρει ο Θανάσης τη φανέλα με το 13;

β) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα, αν οι διαθέσιμες εμφανίσεις είναι οι 7, 11, 13, 15, 19, 20 και 27.

<u>Λύση</u>

α) Οι εμφανίσεις μπορούν να μοιραστούν στους μαθητές με $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ τρόπους.

Οι τρόποι με τους οποίους ο Δημήτρης παίρνει το 7 είναι $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, εφόσον ουσιαστικά μοιράζονται μόνο οι 4 υπόλοιπες φανέλες. Άρα η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης της φανέλα με το 7 είναι $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$.

Για το επόμενο ερώτημα, θα υπολογίσουμε με πόσους τρόπους παίρνει ο Δημήτρης το 7 και ο Θανάσης το 13. Οι τρόποι είναι $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Άρα από τους 24 τρόπους που ο Δημήτρης παίρνει το 7, υπάρχουν 6 τρόποι που ο Θανάσης παίρνει το 13. Άρα, οι τρόποι που ο Δημήτρης παίρνει το 7 και ο Θανάσης δεν παίρνει το 13 είναι 24 – 6 = 18.

Επομένως η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης το 7 και να μην πάρει ο Θανάσης το 13 είναι $\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$.

β) Ο τρόπος σκέψης είναι ο ίδιος, αλλά τα αποτελέσματα είναι τα εξής.

Οι τρόποι να μοιραστούν οι 5 από τις 7 εμφανίσεις στους 5 μαθητές είναι $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ και η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7 είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{360}{2520} = \frac{1}{7}$.

Ο Δημήτρης παίρνει το 7 και ο Θανάσης το 13 με $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ τρόπους. Άρα οι τρόποι ο Δημήτρης να πάρει το 7 και ο Θανάσης να μην πάρει το 13 είναι 360 – 60 = 300. Επομένως η πιθανότητα ο Δημήτρης να πάρει το 7 και ο Θανάσης να μην πάρει το 13 είναι $\frac{300}{2520} = \frac{5}{42}$.

Άσκηση 8

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καθορίσει τη σειρά με την οποία θα τοποθετούμε τα άτομα στις θέσεις που θα επιλέγουμε για αυτά.

Θα απαντήσουμε στο εξής ερώτημα, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο:

«Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 θέσεις από 6, όταν μας ενδιαφέρει η σειρά που θα τις επιλέξουμε;»

Οι τρόποι είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Για το επόμενο ερώτημα θα βρούμε ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε τις 4 θέσεις για να καθίσουν τα άτομα, ανάμεσα από 5 θέσεις και όχι από 6 θέσεις, αφήνοντας την 6η θέση κενή.

Οι τρόποι να επιλέξουμε τις 4 θέσεις ανάμεσα από 5 θέσεις είναι $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Επομένως η πιθανότητα είναι $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

Αυτή είναι η πιθανότητα να μείνει μια συγκεκριμένη θέση κενή, είτε είναι η πρώτη, είτε είναι η τελευταία.

Άσκηση 9

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Αν επιλέξουμε τη σειρά των 7 παιδιών τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

Λύση

Πρόκειται για 7 παιδιά. Το πλήθος των τρόπων να μπουν στην σειρά είναι $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$.

Για το επόμενο ερώτημα θα σκεφτούμε ως εξής. Πρώτα θα βρούμε το πλήθος των τρόπων να μπουν στη σειρά τα 4 αγόρια, δίπλα-δίπλα. Είναι $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Κάνουμε το ίδιο για τα κορίτσια. Το πλήθος είναι $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Για κάθε τρόπο να τοποθετηθούν τα αγόρια έχουμε 6 τρόπους να τοποθετηθούν τα κορίτσια. Άρα οι συνολικοί τρόποι, αν μπουν αριστερά τα αγόρια και δεξιά τα κορίτσια, είναι $24 \cdot 6 = 144$.

Αν μπουν αριστερά τα κορίτσια και δεξιά τα αγόρια έχουμε άλλους 144 τρόπους. Άρα συνολικά έχουμε 288 τρόπους να μπουν όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια.

Επομένως η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια είναι $\frac{288}{5040} = \frac{2}{35}$.

Άσκηση 10

Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

Λύση

Το πλήθος των τρόπων που μπορούν να καθίσουν τα 10 παιδιά είναι $10!$. Άρα, $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3628800$.

Θα υπολογίσουμε με πόσους τρόπους γίνεται να καθίσουν δίπλα ο Κώστας με την Ελένη. Ας υποθέσουμε ότι επιλέγουμε πρώτα τις 2 θέσεις, από τις 10, που θα καθίσουν ο Κώστας και η Ελένη, βάζοντας τον Κώστα στην πρώτη θέση που θα επιλέξουμε και την Ελένη στη δεύτερη. Για να επιλέξουμε τη θέση του Κώστα έχουμε 10 τρόπους. Αν επιλέξουμε την πρώτη από τις 10 θέσεις, τότε η Ελένη έχει μόνο μία επιλογή, τη δεύτερη θέση. Αν επιλέγουμε την τελευταία από τις 10 θέσεις, τότε η Ελένη έχει μόνο μία επιλογή, την ένατη θέση. Για κάθε μία από τις υπόλοιπες 8 ενδιάμεσες θέσεις για τον Κώστα, η Ελένη έχει 2 επιλογές, την προηγούμενη και την επόμενη.

Επομένως, συνολικά υπάρχουν $1+1+2\cdot8=18$ διαφορετικές τοποθετήσεις του Κώστα και της Ελένης δίπλα-δίπλα.

Για κάθε μία από αυτές τις τοποθετήσεις έχουμε $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=40320$ τρόπους να καθίσουν τα υπόλοιπα 8 παιδιά, στις υπόλοιπες 8 θέσεις.

Οι τρόποι να καθίσουν τα παιδιά, ώστε ο Κώστας και η Ελένη να είναι σε διπλανές θέσεις είναι $18\cdot40320=725760$.

Άρα, τελικά οι πιθανότητα να καθίσουν ο Κώστας και η Ελένη σε διπλανές θέσεις είναι $\frac{725760}{3628800}=\frac{1}{5}$.

Άσκηση 11

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα τυχαία επιλεγμένα άτομα από την τάξη σας (ή το σχολείο σας), να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ν είναι τα παιδιά της τάξης με ν>3. Οι τρόποι να έχουν γεννηθεί τα παιδιά στις 4 εποχές είναι 4^{ν}.

Αν 4 παιδιά έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές εποχές, αυτό σημαίνει ότι υπόλοιπα ν-4 παιδιά έχουν γεννηθεί στις 4 εποχές με $4^{\nu-4}$ τρόπους και τα 4 παιδιά έχουν γεννηθεί στις 4 εποχές με $4\cdot3\cdot2\cdot1$ τρόπους.

Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{4\cdot2\cdot3\cdot1\cdot4^{\nu-4}}{4^{\nu}}=\frac{4\cdot3\cdot2}{4^4}=\frac{6}{64}=\frac{3}{32}$.

Η λύση είναι ανεξάρτητη του πλήθους των ατόμων που έχει η τάξης σας, αρκεί να είναι περισσότερα από 3.

Μέρος Β΄: Συνδυασμοί

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Σε ένα πρωτάθλημα συμμετέχουν 7 ομάδες και αγωνίζονται όλες με όλες μία φορά. Να υπολογίσετε πόσοι αγώνες θα γίνουν.

<u>Λύση</u>

Πρόκειται για συνδυασμούς των 7 ομάδων, ανά 2 (εφόσον 2 ομάδες θα δώσουν ένα αγώνα). Δε μας ενδιαφέρει η σειρά που θα επιλέξουμε τις ομάδες.

Άρα $\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} = \frac{42}{2} = 21$ αγώνες.

Άσκηση 2

α) Από ένα σύνολο 10 μαθητών επιλέγουμε 4 μαθητές τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο μαθητή;

β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν έχουμε ένα σύνολο ν μαθητών και επιλέγουμε, τυχαία, κ μαθητές.

<u>Λύση</u>

α) Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 4 από έναν κύκλο 10 μαθητών είναι ίσοι με τους συνδυασμούς των 10 ανά 4.

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

Η επιλογή συγκεκριμένου μαθητή ανάμεσα στους 4 σημαίνει ότι οι υπόλοιποι 3 μπορεί να είναι οποιοιδήποτε από τους υπόλοιπους 9. Άρα, οι τρόποι να επιλέξουμε τους 3 από τους 9 είναι:

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{84}{210} = \frac{42}{105}$.

β) Ομοίως βρίσκουμε

$$\frac{\binom{\nu-1}{\kappa-1}}{\binom{\nu}{\kappa}} = \frac{\frac{(\nu-1)!}{(\nu-1-\kappa+1)! \cdot (\kappa-1)!}}{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)! \cdot \kappa!}} = \frac{\frac{(\nu-1)!}{(\nu-\kappa)! \cdot (\kappa-1)!}}{\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)! \cdot \kappa!}} = \frac{(\nu-1)! \cdot (\nu-\kappa)! \cdot \kappa!}{(\nu-\kappa)! \cdot (\kappa-1)! \cdot \nu!} = \frac{(\nu-1)! \cdot \kappa!}{(\kappa-1)! \cdot \nu!}$$

Άσκηση 3

Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπαταρίες, από τις οποίες οι 2 είναι αποφορτισμένες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπαταρίες από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:

α) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες.

β) Το πολύ μία από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένη.

γ) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες.

<u>Λύση</u>

Συμβολίζουμε με $Α_1$, $Α_2$ τις δύο αφόρτιστες και με $Φ_1$, $Φ_2$, $Φ_3$ τις τρεις φορτισμένες μπαταρίες.

α) α΄ τρόπος

Θεωρούμε το π.τ. «επιλέγουμε τυχαία δύο μπαταρίες, τη μια μετά την άλλη, χωρίς επανατοποθέτηση».

Τότε μια δυνατή έκβαση είναι η $Α_1Α_2$, όταν π.χ. επιλέγουμε και στην πρώτη και στη δεύτερη φορά αφόρτιστη μπαταρία.

Ο δ.χ. του π.τ. είναι $Ω=\{Φ_1Φ_2, Φ_1Φ_3, Φ_2Φ_1, Φ_2Φ_3, Φ_3Φ_1, Φ_3Φ_2, Φ_1Α_1, Φ_1Α_2, Φ_2Α_1, Φ_2Α_2, Φ_3Α_1, Φ_3Α_2, Α_1Φ_1, Α_1Φ_2, Α_1Φ_3, Α_2Φ_1, Α_2Φ_2, Α_2Φ_3, Α_1Α_2, Α_2Α_1\}$.

Άρα, το ενδεχόμενο «οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αφόρτιστες» έχει πιθανότητα $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

β΄ τρόπος

Θεωρούμε το π.τ. «επιλέγουμε τυχαία δύο μπαταρίες από τις πέντε». Εδώ δεν διακρίνουμε τη σειρά επιλογής (ποια μπαταρία επιλέγουμε πρώτη και ποια δεύτερη).

Υπάρχουν συνολικά $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ συνδυασμοί.

Ευνοϊκός είναι 1 συνδυασμός, όταν επιλέγουμε δύο αφόρτιστες μπαταρίες.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{10}$.

β) α΄ τρόπος

Σύμφωνα με τη μοντελοποίηση που έχουμε χρησιμοποιήσει στον α΄ τρόπο του προηγούμενου ερωτήματος και τον αντίστοιχο δ.χ., το ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι το $\{Φ_1Φ_2, Φ_1Φ_3, Φ_2Φ_1, Φ_2Φ_3, Φ_3Φ_1, Φ_3Φ_2, Φ_1Α_1, Φ_1Α_2, Φ_2Α_1, Φ_2Α_2, Φ_3Α_1, Φ_3Α_2, Α_1Φ_1, Α_1Φ_2, Α_1Φ_3, Α_2Φ_1, Α_2Φ_2, Α_2Φ_3\}$.

Άρα η πιθανότητά του είναι $\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$.

β΄ τρόπος

Θα βρούμε την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου του ζητούμενου.

Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο είναι «και οι δύο από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες». Ένας από τους 10 συνδυασμούς πραγματοποιεί το ενδεχόμενο. Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{1}{10}$ και συνεπώς του συμπληρωματικού ενδεχομένου είναι $\frac{9}{10}$.

γ) Το ενδεχόμενο «οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες» μπορεί να γραφτεί και ως «οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι φορτισμένες».

α΄ τρόπος

Το ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι το {$Φ_1Φ_2$, $Φ_1Φ_3$, $Φ_2Φ_1$, $Φ_2Φ_3$, $Φ_3Φ_1$, $Φ_3Φ_2$}.}.

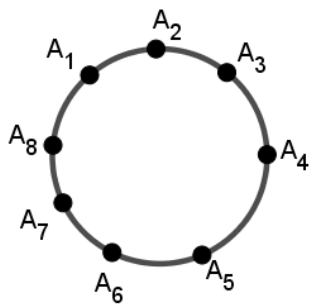
Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

β΄ τρόπος

Οι φορτισμένες μπαταρίες είναι 3 από τις 5. Μπορούμε να επιλέξουμε 2 από τις 3 φορτισμένες μπαταρίες με $\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3$ τρόπους. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{3}{10}$.

Άσκηση 4

Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία A_1, A_2, …, A_8.



α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά;

β) Πόσες διαγώνιες έχει ένα κανονικό οκτάγωνο;

γ) Πόσα τρίγωνα υπάρχουν με αυτά τα σημεία ως κορυφές;

δ) Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα του ερωτήματος (α). Ποια είναι η πιθανότητα:

  i) να μη διέρχεται από το σημείο A_1;

  ii) να διέρχεται από το σημείο A_2;

<u>Λύση</u>

α) Ο αριθμός των ευθυγράμμων τμημάτων αντιστοιχούν στους δυνατούς συνδυασμούς των 8 ανά 2.

$$\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\cdot 6!}=\frac{8\cdot 7}{2}=28$$

β) Από το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που υπολογίσαμε στο α), αφαιρούμε 8, που αντιστοιχούν στις πλευρές του οκταγώνου. Άρα, το πλήθος των διαγωνίων είναι 20.

γ) Εφόσον δεν υπάρχουν πάνω από δύο συνευθειακά σημεία, ο αριθμός των τριγώνων αντιστοιχούν στους συνδυασμούς των 8 ανά 3.

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\cdot 5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=8\cdot 7=56$$

δ) i) Οι συνδυασμοί ανά 2 των σημείων που περιέχουν το A_1 είναι 7 (εφόσον τα υπόλοιπα σημεία είναι 7). Οι υπόλοιποι συνδυασμοί είναι 28 – 7 = 21.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{3}{4}$.

ii) Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{4}$.

Άσκηση 5

Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) τα άτομα να είναι γυναίκες,

β) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας,

γ) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

<u>Λύση</u>

Υπάρχουν συνολικά 13 άτομα. Οι δυνατοί συνδυασμοί τους, ανά 4, ανεξαρτήτως φύλου είναι πλήθους $\binom{13}{4}=\frac{13!}{4!\cdot 9!}=\frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2}=13\cdot 11\cdot 5=715$

α) Οι δυνατοί συνδυασμοί των 6 γυναικών, ανά 4 είναι $\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{15}{715}=\frac{3}{143}$.

β) Η πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου «κανένας να μην είναι άνδρας» έχει υπολογιστεί στο ερώτημα (α).

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1-\frac{3}{143}=\frac{140}{143}$.

γ) Αν υπάρχει ακριβώς μία γυναίκα, τότε τα υπόλοιπα άτομα της τετράδας είναι άνδρες. Επομένως, υπολογίζουμε τους συνδυασμούς των 7 ανδρών ανά 3.

$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}=7\cdot 5=35$.

Για κάθε μια από αυτές τις τριάδες μπορούν να προκύψουν τετράδες προσθέτοντας 1 γυναίκα από τις 6. Άρα υπάρχουν $6\cdot 35=210$ τετράδες.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{210}{715}=\frac{42}{143}$.

Άσκηση 6

Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Από ένα σύστημα ελέγχου ποιότητας επιλέγονται τυχαία 4 ασφάλειες και δοκιμάζονται. Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα να επιστραφεί ως απαράδεκτο ένα κουτί που έχει 5 ελαττωματικές ασφάλειες.

<u>Λύση</u>

Υπάρχουν $\binom{20}{4}=\frac{20!}{4!\cdot 16!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2}=5\cdot 19\cdot 3\cdot 17=4845$ συνδυασμοί που μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία τις 4 ασφάλειες από το κουτί, τις οποίες θα δοκιμάσουμε.

Θα βρούμε το πλήθος των συνδυασμών για τους οποίους ένα κουτί χαρακτηρίζεται απαράδεκτο και επιστρέφεται. Οι συνδυασμοί είναι:

- Εκείνοι που και οι 4 ασφάλειες είναι ελαττωματικές. Έχουμε 5 ελαττωματικές, άρα σε κάθε τετράδα θα λείπει 1 ελαττωματική. Συνεπώς έχουμε 5 συνδυασμούς. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του $\binom{5}{4}$.
- Εκείνοι που οι 3 ασφάλειες είναι ελαττωματικές. Οι δυνατοί συνδυασμοί των 5 ελαττωματικών ανά 3 είναι $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$. Για κάθε έναν από αυτούς μπορούμε να επιλέξουμε 1 από τις 15 μη ελαττωματικές ασφάλειες, ώστε να συμπληρωθεί η τετράδα. Άρα έχουμε $15 \cdot 10 = 150$ συνδυασμούς με 3 ελαττωματικές ασφάλειες.
- Εκείνοι που έχουν 2 ελαττωματικές ασφάλειες. Οι δυνατοί συνδυασμοί 5 ελαττωματικών ανά 2 είναι $\binom{5}{2} = 10$. Για κάθε έναν από αυτούς μπορούμε να επιλέξουμε 2 μη ελαττωματικές ασφάλειες, για να συμπληρωθεί η τετράδα, με $\binom{15}{2} = 105$ τρόπους.

Άρα έχουμε $10 \cdot 105 = 1050$ συνδυασμούς με 2 ελαττωματικές ασφάλειες.
Συνολικά έχουμε $1050 + 150 + 5 = 1205$ συνδυασμούς για τους οποίους το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο.
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1205}{4845} \simeq 0,249$.

Άσκηση 7

Έχετε δύο σύμβολα το X και I. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορείτε να σχηματίσετε χρησιμοποιώντας 4 φορές το I και 3 φορές το X; Π.χ. μία συμβολοσειρά είναι η XIIXIIX. Αν κάποιος επιλέξει τυχαία μία τέτοια σειρά, ποια είναι η πιθανότητα το 1ο σύμβολο από αριστερά να είναι X;

<u>Λύση</u>

Έχουμε 7 διακριτές κενές θέσεις για να βάλουμε σύμβολα X και I. Έχουμε επίσης 4 «I» και 3 «X».
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 από τις 7 θέσεις για να βάλουμε τα «I»; Δε μας ενδιαφέρει η σειρά καθώς, με όποια σειρά και να επιλέξουμε 4 από τις 7 θέσεις, θα μπει το ίδιο σύμβολο «I». Άρα: $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = 35$.

(Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν υπολογίσουμε τους δυνατούς συνδυασμούς να επιλέξουμε 3 από τις 7 θέσεις για να βάλουμε τα «X», καθώς $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$)

Για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους δεν υπάρχουν διαφορετικές δυνατές τοποθετήσεις των του συμβόλου «Χ», στις υπόλοιπες 3 θέσεις, καθώς πρόκειται για το ίδιο σύμβολο.
Θα υπολογίσουμε το πλήθος των συνδυασμών, που το πρώτο από αριστερά σύμβολο να είναι «Χ». Για τις υπόλοιπες 6 θέσεις έχουμε $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ τρόπους να τοποθετήσουμε τα «Χ» (και όπως και προηγουμένως, τα «Ι» τοποθετούνται στις υπόλοιπες θέσεις, χωρίς να υπάρχουν διαφορετικές επιλογές, για κάθε τρόπο από τους 15).
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$.

Πρόσθετο Υλικό

Άσκηση 1
Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;
- Να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη.
- Να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο τρία από τα δέκα νούμερα του τηλεφώνου του και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά νούμερα στην τύχη.

Λύση
Ο πρώτος νικητής στο τζόκερ θα πρέπει να έχει "μαντέψει" σωστά έναν αριθμό από 20 (από το 1 έως το 20) και πέντε αριθμούς από 45 (από το 1 έως το 45). Οπότε, η πιθανότητα να κερδίσει κανείς στο τζόκερ συμπληρώνοντας μία στήλη είναι:
$$P(J)=\frac{1}{20\cdot\binom{45}{5}}=\frac{1}{20\cdot\frac{45!}{40!\cdot 5!}}=\frac{5!}{20\cdot 41\cdot 42\cdot 43\cdot 44\cdot 45}=\frac{1}{24.435.180}$$
Αν ξέρουμε τα τρία πρώτα ψηφία του τηλεφώνου του φίλου μας, μπορούμε να πληκτρολογήσουμε τα υπόλοιπα 7 με 10^7 τρόπους αλλά μόνο σε έναν από αυτούς θα απαντήσει πράγματι ο φίλος μας. Άρα η πιθανότητα να καλέσουμε το φίλο μας είναι:
$$P(\Phi)=\frac{1}{10^7}=\frac{1}{10.000.000}$$
Αν ξέρουμε τρία διαδοχικά (αλλά όχι κατ' ανάγκην τα τρία πρώτα) ψηφία, τότε μπορούμε να επιλέξουμε την τριάδα θέσεων με 8 τρόπους, άρα μπορούμε να πληκτρολογήσουμε τα 10 νούμερα με $8\cdot 10^7$ τρόπους. Άρα τώρα η πιθανότητα γίνεται:
$$P(\Phi)=\frac{1}{8\cdot 10^7}=\frac{1}{80.000.000}$$
Από τα παραπάνω φαίνεται ότι αν ξέρουμε τα τρία πρώτα ψηφία του τηλεφώνου είναι πιθανότερο να "πετύχουμε" το τηλέφωνο του φίλου μας παρά να κερδίσουμε στο τζόκερ.

Το συμπέρασμα αντιστρέφεται αν ξέρουμε τρία διαδοχικά ψηφία αλλά δεν ξέρουμε τη θέση τους. Ακόμη μικρότερη είναι η πιθανότητα να μιλήσουμε με το φίλο μας αν ξέρουμε τρία τυχαία νούμερα του τηλεφώνου του χωρίς να ξέρουμε τη θέση τους.

Άσκηση 2

α) Εικοσιτρείς φοιτητές/τριες έχουν μια κοινή ομάδα συζήτησης, σε δικτυακή εφαρμογή επικοινωνίας, για ανταλλαγή σημειώσεων. Σε αυτή την ομάδα ξεκινάει μία συζήτηση για το πότε έχει καθένας/καθεμία γενέθλια. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν δύο τουλάχιστον φοιτητές/τριες γενέθλια την ίδια ημέρα;

β) Να εκτιμήσετε το πλήθος των ατόμων μίας ομάδας, ώστε να είναι περισσότερο από 99,9% πιθανό ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Η τιμή της παράστασης $1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}$, όπου $\kappa\leq 365$ φυσικός αριθμός δίνεται (προσεγγιστικά) στον παρακάτω πίνακα, για κάποιες τιμές του κ:

κ	**10**	**20**	**23**	**30**	**60**	**70**
	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

Λύση

α) Μπορούμε ευκολότερα να υπολογίσουμε την πιθανότητα όλοι οι φοιτητές να έχουν γενέθλια σε διαφορετικές μέρες. Οι τρόποι να έχουν γενέθλια οι 23 φοιτητές είναι 365^{23} (κάθε φοιτητής μπορεί να έχει γενέθλια οποιαδήποτε από τις 365 μέρες του χρόνου). Σε διαφορετικές μέρες μπορούν να έχουν γενέθλια με $365\cdot 364\cdot 363\cdots 343=\frac{365!}{(365-23)!}$ τρόπους.

Οπότε, η πιθανότητα να έχουν γενέθλια όλοι σε διαφορετικές μέρες είναι

$$\frac{365\cdot 364\cdots(365-23+1)}{365^{23}}$$

και η πιθανότητα να υπάρχουν δύο τουλάχιστον φοιτητές με γενέθλια την ίδια μέρα είναι

$$1-\frac{365\cdot 364\cdots(365-23+1)}{365^{23}}\simeq 0,507$$

Σύμφωνα με τον πίνακα, για να είναι η πιθανότητα μεγαλύτερη από 99,9% να υπάρχουν δύο τουλάχιστον άτομα με γενέθλια την ίδια μέρα, αρκεί το πλήθος των ατόμων να είναι από 70 και πάνω.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.1 : ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ – ΔΕΙΓΜΑ – ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Ο δήμαρχος μιας πόλης θέλει να διερευνήσει τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η πόλη του ώστε να δώσει έμφαση στην επίλυση αυτών. Για το λόγο αυτό, ανέθεσε σε μια εταιρεία δημοσκοπήσεων μια έρευνα κατά την οποία 500 δημότες κλήθηκαν να δηλώσουν, ποιο πρόβλημα της πόλης θεωρούν το πιο σημαντικό. Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1) Ο πληθυσμός της έρευνας είναι:

1) Οι 500 δημότες που ρωτήθηκαν.

2) Όλοι οι δημότες της πόλης.

3) Όλοι οι Έλληνες πολίτες.

2) Το δείγμα αποτελούν:

1) Οι 500 δημότες που ρωτήθηκαν.

2) Όλοι οι δημότες της πόλης.

3) Όλοι οι Έλληνες πολίτες.

3) Η μεταβλητή της έρευνας είναι:

1) Τα προβλήματα της πόλης.

2) Τα προβλήματα των δημοτών.

3) Το σημαντικότερο πρόβλημα της πόλης.

<u>Λύση</u>

1) Όλοι οι δημότες της πόλης

2) Οι 500 δημότες που ρωτήθηκαν

3) Το σημαντικότερο πρόβλημα της πόλης

Άσκηση 2

Στις παρακάτω περιπτώσεις ποιες μπορεί να είναι οι μεταβλητές που μας ενδιαφέρουν; Να γίνει η διάκρισή τους σε ποιοτικές ή ποσοτικές και να αναφερθούν μερικές δυνατές τιμές τους:

1) Εξετάζουμε ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας.

2) Εξετάζουμε ένα δείγμα προϊόντων από μια παραγωγή.

3) Εξετάζουμε ένα δείγμα τηλεθεατών.

4) Εξετάζουμε τους καλαθοσφαιριστές μιας ομάδας σε έναν αγώνα.

<u>Λύση</u>

1) Ένα δείγμα υπαλλήλων μιας εταιρείας θα μπορούσε να εξεταστεί ως προς τις αμοιβές τους. Τότε η μεταβλητή είναι «ύψος αμοιβής», είναι ποσοτική και μερικές τιμές της θα μπορούσε να είναι 580, 750, 1250, 2500 Ευρώ.

Ωστόσο, το ίδιο δείγμα υπαλλήλων θα μπορούσε να εξεταστεί ως προς τις σπουδές. Η μεταβλητή θα μπορούσε να είναι «επίπεδο σπουδών», που είναι ποιοτική και μερικές τιμές της θα μπορούσαν να είναι: «απολυτήριο Γυμνασίου», «απολυτήριο Λυκείου», «πτυχίο ανώτατης εκπαίδευσης», «μεταπτυχιακό δίπλωμα», «διδακτορικό δίπλωμα» κ.α. Ή θα μπορούσε να είναι «κατεύθυνση σπουδών» που είναι ποιοτική και μερικές τιμές της είναι «οικονομικές», «μηχανικού», «διοικητικού» κ.α.

2) Ένα δείγμα προϊόντων θα μπορούσε να εξεταστεί με μεταβλητή την ποιότητα (ποιοτική μεταβλητή) και τιμές της θα μπορούσε να είναι: «αποδεκτό» και «απορριπτέο». Αλλά θα μπορούσε να εξεταστεί και με μεταβλητή το βάρος (ποσοτική μεταβλητή).

Ομοίως για τα ερωτήματα 3, 4.

Άσκηση 3

Για της ανάγκες μιας έρευνας συγκεντρώσαμε στοιχεία από διερχόμενα οχήματα, σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο της πόλης, κατά τη διάρκεια ενός εικοσιτετραώρου. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται μερικά από τα στοιχεία αυτά.

Είδος οχήματος	Χρώμα οχήματος	Ταχύτητα σε Km/h	Πλήθος επιβατών
Φορτηγό	Κόκκινο	26	2
Αυτοκίνητο ΙΧ	Γκρι	38	4
Ποδήλατο	Πράσινο	13	1
Αυτοκίνητο ΙΧ	Κόκκινο	52	2
Λεωφορείο	Λευκό	34	25
Αυτοκίνητο ΙΧ	Λευκό	45	1
Μοτοσικλέτα	Μαύρο	62	2

Ποιες είναι οι μεταβλητές της έρευνας και ποιο το είδος τους;

<u>Λύση</u>

Πρώτη στήλη: κατηγορία (είδος) οχήματος – ποιοτική μεταβλητή

Δεύτερη στήλη: χρώμα οχήματος – ποιοτική μεταβλητή

Τρίτη στήλη: ταχύτητα οχήματος στο συγκεκριμένο σημείο τη στιγμή της καταγραφής – ποσοτική μεταβλητή

Τέταρτη στήλη: πλήθος επιβατών τη στιγμή της καταγραφής – ποσοτική μεταβλητή

Σχόλιο: η ταχύτητα του οχήματος θα μπορούσε να θεωρηθεί συνεχής ή διακριτή μεταβλητή (ανάλογα με το αν «επιτρέπουμε» ή όχι όλες τις τιμές μεταξύ δύο ακέραιων αριθμών). Αντιθέτως, το πλήθος επιβατών προφανώς δεν μπορεί να θεωρηθεί συνεχής.

Άσκηση 4

Σε μια εκπομπή δημόσιας συζήτησης, συγκεκριμένου τηλεοπτικού καναλιού, το κοινό καλείται να ψηφίσει, αν συμφωνεί με την Α άποψη ή τη Β άποψη. Να αναφέρετε δύο λόγους για τους οποίους τα αποτελέσματα της ψηφοφορίας δεν μπορεί να γενικευτούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό της χώρας.

Λύση

Το δείγμα (οι τηλεθεατές που απάντησαν) δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού της χώρας, αφού καθορίζεται από το ποιοι προτιμούν να βλέπουν τηλεόραση και ποιοι προτιμούν το συγκεκριμένο τηλεοπτικό κανάλι, ποια ώρα διεξάγεται η έρευνα, τον τρόπο ψηφοφορίας (τηλέφωνο, διαδίκτυο, κλπ), κοκ.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.2: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Το επάγγελμα του πατέρα 20 μαθητών καταγράφηκε στον διπλανό πίνακα. Να κάνετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα.

Επάγγελμα πατέρα	Αριθμός ατόμων
Ιδιωτικός υπάλληλος	6
Δημόσιος υπάλληλος	7
Αυτοαπασχολούμενος	5
Άλλο	2

Λύση

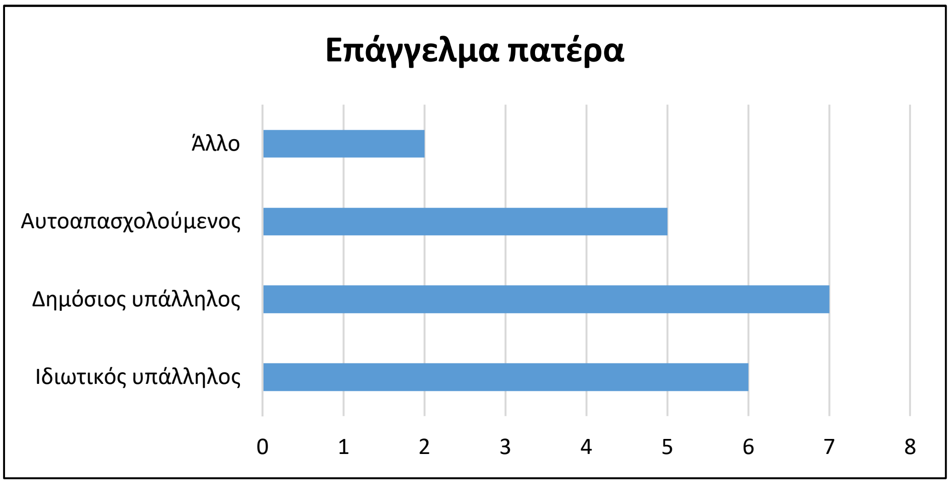
Οι σχετικές συχνότητες είναι:

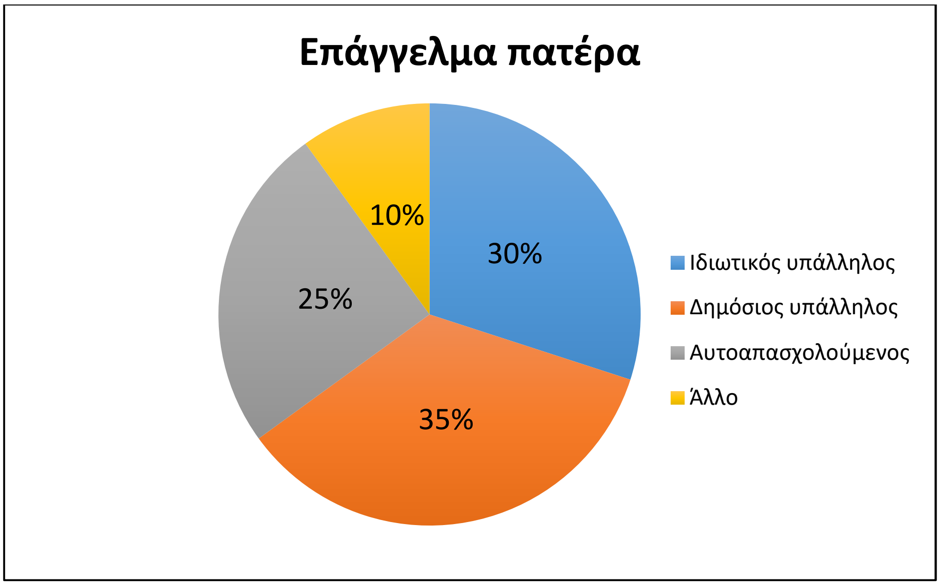
$f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{6}{20} = 0,3$ και $f_1\%=30\%$, $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{7}{20} = 0,35$ και $f_2\%=35\%$, κοκ

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας σχετικών συχνοτήτων

Επάγγελμα πατέρα	Αριθμός ατόμων	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
Ιδιωτικός υπάλληλος	6	0,3	30%
Δημόσιος υπάλληλος	7	0,35	35%
Αυτοαπασχολούμενος	5	0,25	25%
Άλλο	2	0,1	10%
Σύνολο	20	1,0	100%

Το ραβδόγραμμα συχνοτήτων και το κυκλικό διάγραμμα φαίνονται παρακάτω:





Άσκηση 2

Στον διπλανό πίνακα δίνονται τα καθαρά κέρδη μιας εταιρείας, ανά έτος, από το 2014 έως και το 2017. Να κάνετε χρονόγραμμα όπου να φαίνεται η εξέλιξη των κερδών σε σχέση με το χρόνο.

Έτος	Κέρδη σε ευρώ
2014	180.000
2015	270.000
2016	230.000
2017	210.000

<u>Λύση</u>

Το χρονόγραμμα φαίνεται παρακάτω:

Άσκηση 3

Η στατιστική υπηρεσία της Πυροσβεστικής μας έδωσε το διπλανό κυκλικό διάγραμμα, που παρουσιάζει τα ποσοστά των κλήσεων ανά κατηγορία. Αν το σύνολο των κλήσεων είναι 60.400, να γίνει πίνακας συχνοτήτων.

Λύση

Οι επεμβάσεις σε ανελκυστήρες είναι το 27% των 60.400 κλήσεων, άρα είναι $27\% \cdot 60400 = \frac{27}{100} \cdot 60400 = 16308$, και ομοίως υπολογίζουμε για τις υπόλοιπες κατηγορίες κλήσεων. Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων:

κατηγορίες κλήσεων	**Αριθμός κλήσεων**	**σχετική συχνότητα %**
Επεμβάσεις σε ανελκυστήρες	16.308	27%
Παροχές βοήθειας	12.684	21%
Πυρκαγιές	28.388	47%
Ψευδείς αγγελίες	3.020	5%
Σύνολο	60.400	100%

Άσκηση 4

Δίνεται η ποσοστιαία σύνθεση (%) του προσωπικού μιας επιχείρησης, με αριθμό υπαλλήλων 80 άτομα ως προς το μορφωτικό τους επίπεδο.

1) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

2) Να απεικονίσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα συχνοτήτων και με κυκλικό διάγραμμα.

Τίτλος Σπουδών	**Ποσοστό (%)**
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα	20
Πτυχίο Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης	50
Απολυτήριο Λυκείου	30

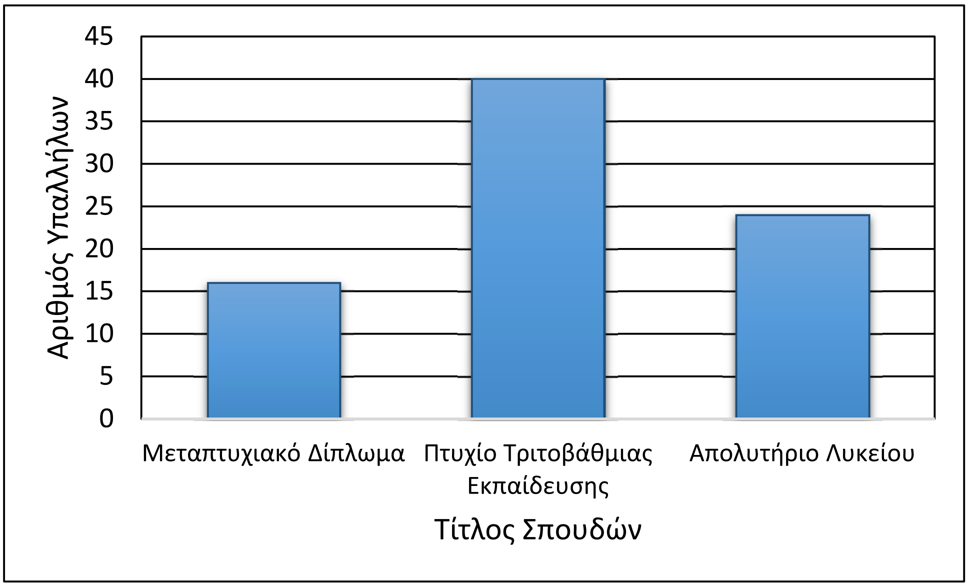
Λύση

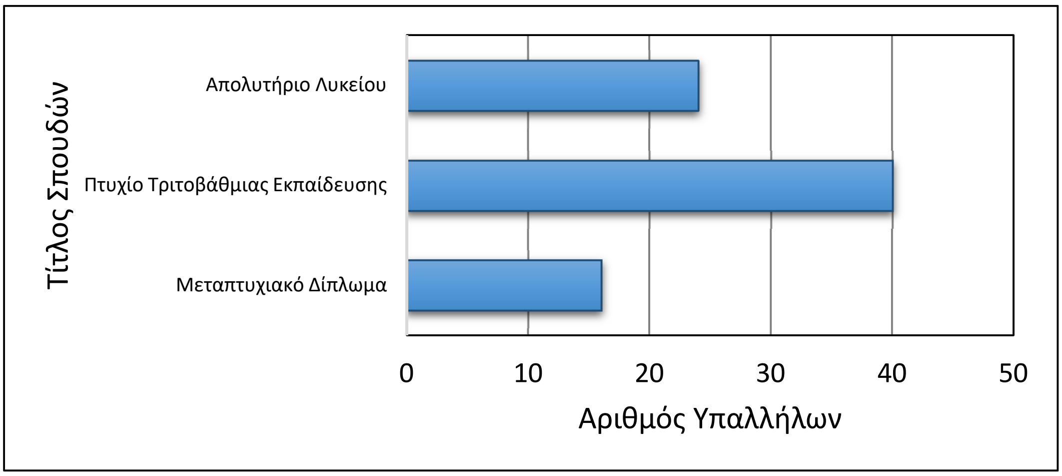
Οι κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος είναι το 20% των 80 υπαλλήλων, άρα $20\% \cdot 80 = \frac{20}{100} \cdot 80 = 16$ υπάλληλοι. Ομοίως βρίσκουμε ότι πτυχίο τριτοβάθμιας εκπαίδευσης έχουν 40 υπάλληλοι και απόφοιτοι Λυκείου είναι 24 υπάλληλοι. Κατασκευάζουμε έτσι τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων:

Τίτλος Σπουδών (μεταβλητή)	αριθμός υπαλλήλων (συχνότητα)	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα	16	0,2	20%
Πτυχίο Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης	40	0,5	50%
Απολυτήριο Λυκείου	24	0,3	30%
Σύνολο υπαλλήλων	80	1,0	100%

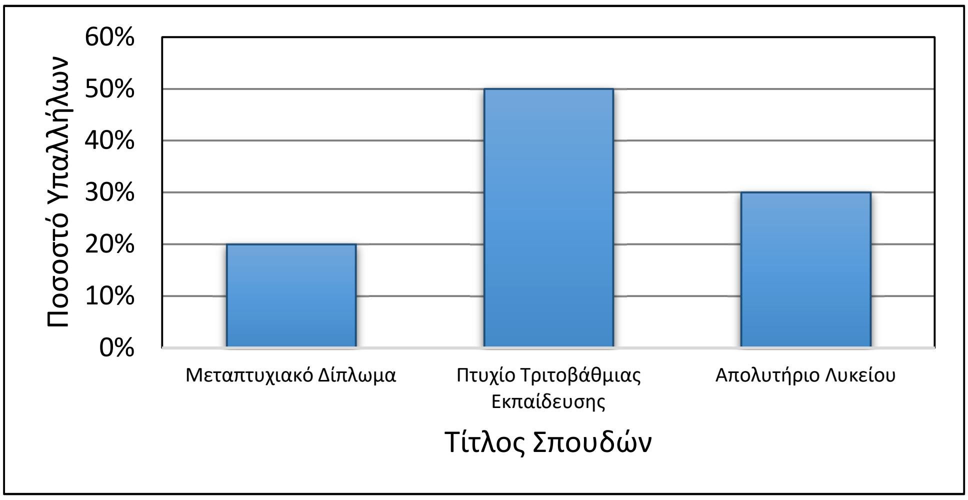
Παρακάτω φαίνονται ραβδογράμματα και κυκλικά διαγράμματα που αναπαριστούν αυτά τα δεδομένα. Η επιλογή κάποιου από αυτά εξαρτάται από τους στόχους της παρουσίασης και την προτίμηση αυτού που το παρουσιάζει.

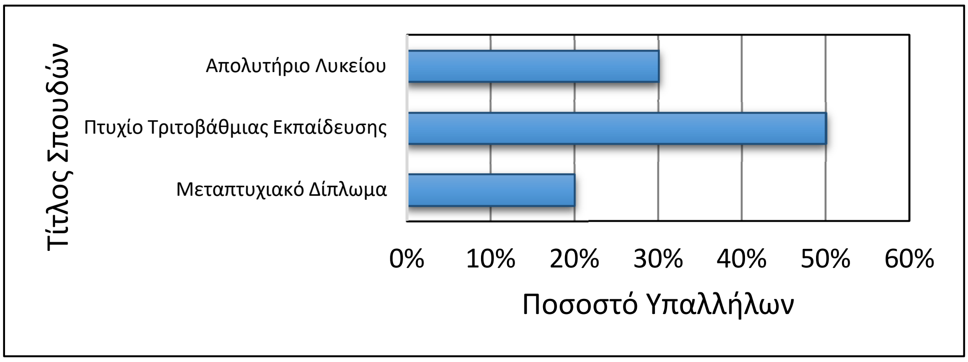
ραβδογράμματα συχνοτήτων:



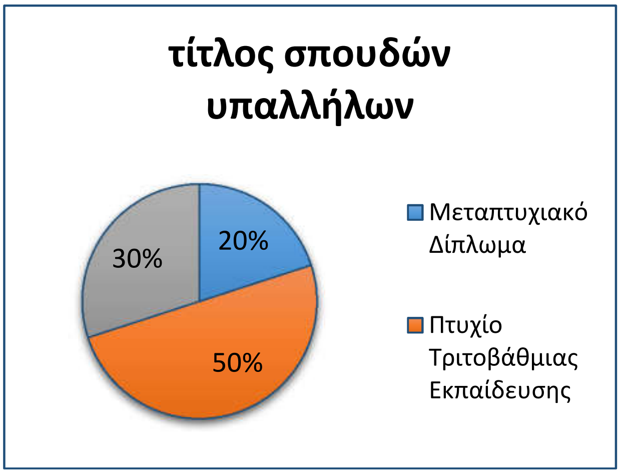


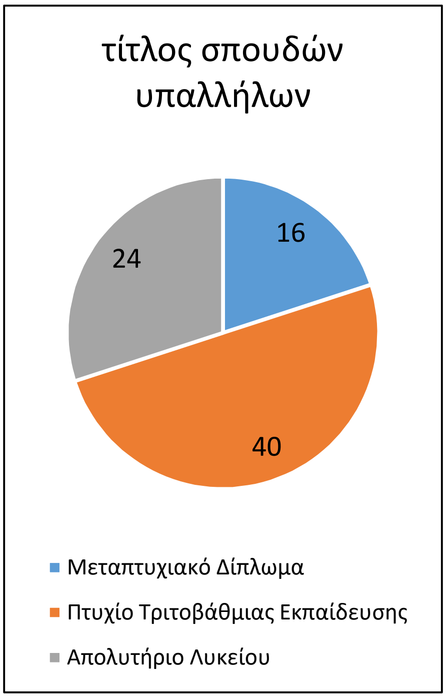
ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων:





Κυκλικά διαγράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων:





Άσκηση 5

Οι βαθμοί στην Ιστορία 25 μαθητών, ενός τμήματος της Β΄ τάξης ΓΕΛ, είναι:

1) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
2) Να απεικονίσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα συχνοτήτων και με σημειόγραμμα.

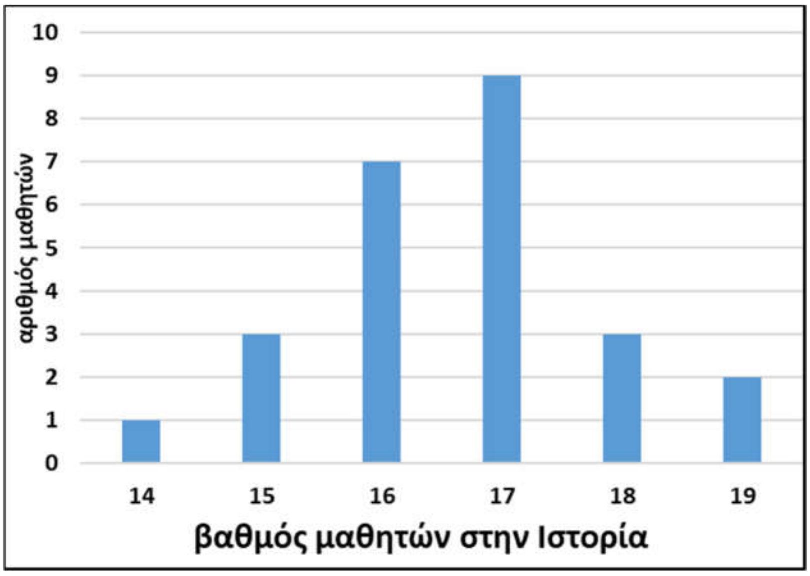
16	15	17	16	17
18	17	16	17	18
16	19	17	15	16
17	16	15	17	18
17	14	17	16	19

<u>Λύση</u>

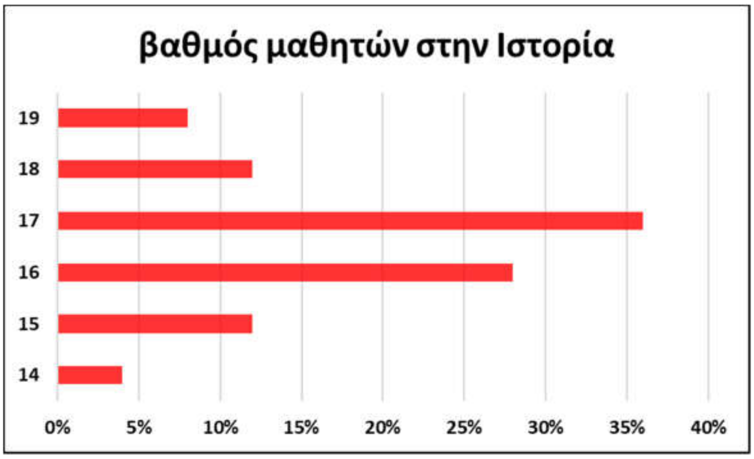
1) Μετά την καταμέτρηση και τους υπολογισμούς, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων είναι ο εξής:

βαθμός (μεταβλητή)	**αριθμός μαθητών (συχνότητα)**	**σχετική συχνότητα**	**σχετική συχνότητα %**
14	1	0,04	4%
15	3	0,12	12%
16	7	0,28	28%
17	9	0,36	36%
18	3	0,12	12%
19	2	0,08	8%
Σύνολο	25	1,0	100%

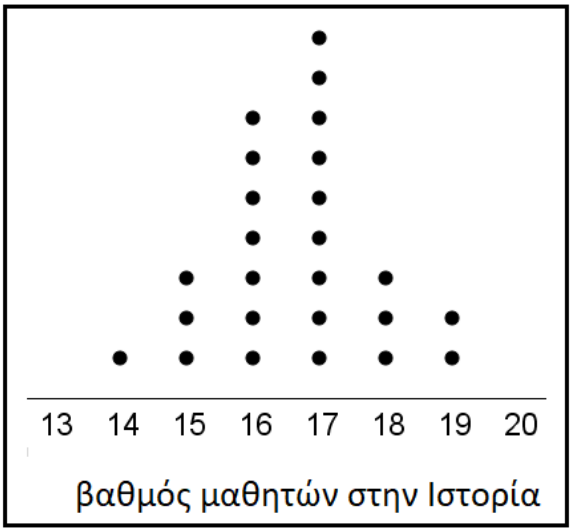
2) Ραβδόγραμμα συχνοτήτων:



Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων:



Σημειόγραμμα:



Άσκηση 6

Οι πιο κάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις της άνω έδρας ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 30 φορές.

2	5	6	1	2	5	4	3	2	5
1	3	5	4	1	3	2	6	5	4
1	2	6	2	4	3	1	6	4	5

1) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.

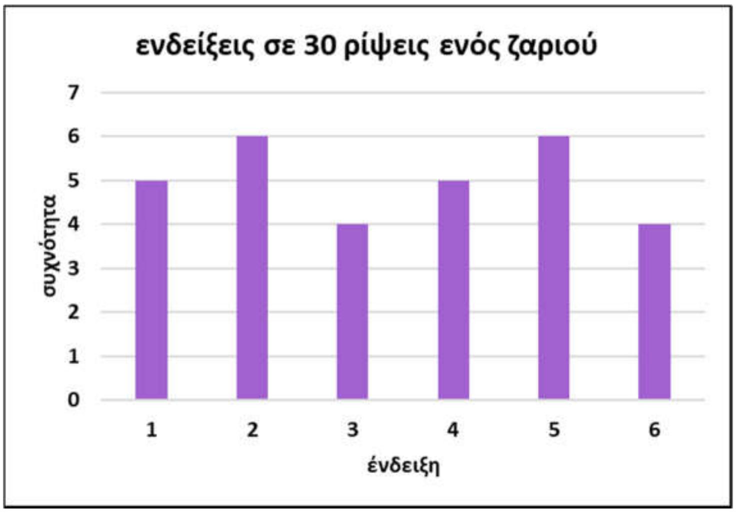
2) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

Λύση

Μετά την καταμέτρηση και τους υπολογισμούς, ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων είναι ο εξής:

ένδειξη ζαριού (μεταβλητή)	συχνότητα	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
1	5	0,167	16,7%
2	6	0,2	20%
3	4	0,133	13,3%
4	5	0,167	16,7%
5	6	0,2	20%
6	4	0,133	13,3%
Σύνολο	30	1,00	100%

Ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων φαίνεται παρακάτω



Άσκηση 7

Στον πιο κάτω πίνακα δίνεται η συγκέντρωση (mgr/cm^3) ενός ρύπου στον αέρα 40 πόλεων της χώρας.

16	24	36	47	23	22	43	27	49	48
12	32	17	38	42	27	31	50	38	21
36	19	28	31	28	25	45	12	57	51
22	23	24	25	24	37	43	25	39	51

1) Να ομαδοποιήσετε τις παρατηρήσεις στις κλάσεις: [10,20), [20,30), [30,40), [40,50) και [50,60).

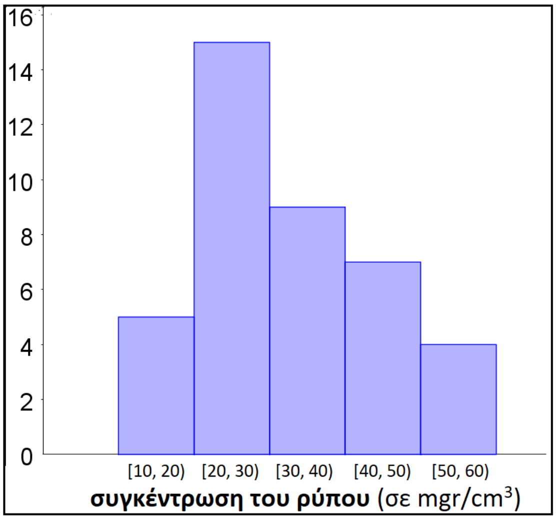
2) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

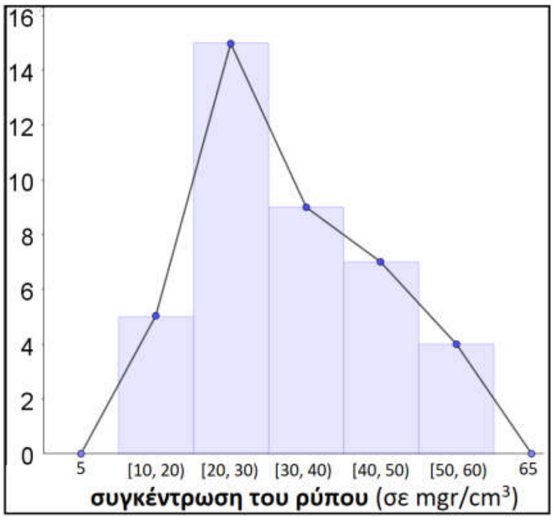
3) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Λύση

Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το πολύγωνο συχνοτήτων

συγκέντρωση του ρύπου (σε mgr/cm^3)	**συχνότητα**	**σχετική συχνότητα**	**σχετική συχνότητα %**
[10,20)	5	0,125	12,5%
[20,30)	15	0,375	37,5%
[30,40)	9	0,225	22,5%
[40,50)	7	0,175	17,5%
[50,60)	4	0,1	10%
Σύνολο	40	1,00	100%





Άσκηση 8

Οι 50 εργάτες ενός εργοστασίου έχουν τις παρακάτω ηλικίες:

21	43	50	25	55	30	28	40	31	51
18	47	52	34	47	32	27	41	35	54
30	48	36	43	38	33	27	39	41	43
32	22	46	52	29	32	34	34	42	36
35	28	57	56	20	38	27	27	40	35

1) Να ομαδοποιήσετε τις ηλικίες στις κλάσεις: [18,28), [28,38), [38,48) και [48,58).

2) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

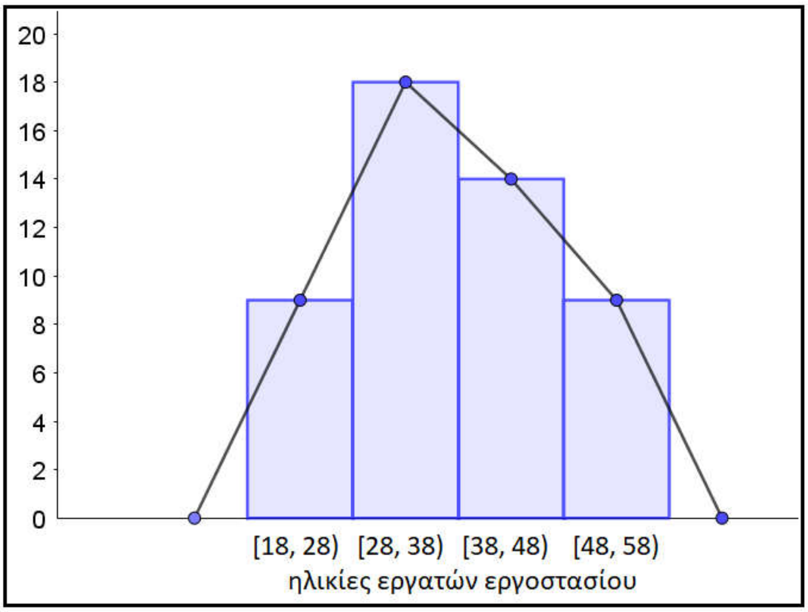
3) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Λύση

Ο πίνακας συχνοτήτων μετά την ομαδοποίηση διαμορφώνεται ως εξής:

ηλικίες εργατών	συχνότητα	σχετική συχνότητα	σχετική συχνότητα %
[18,28)	9	0,18	18%
[28,38)	18	0,36	36%
[38,48)	14	0,28	28%
[48,58)	9	0,18	18%
Σύνολο	50	1,00	100%

Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται παρακάτω:



ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3: ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ
ΘΗΚΟΓΡΑΜΜΑ
ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Οι βαθμοί του Αντρέα σε 4 διαγωνίσματα στα Μαθηματικά ήταν 15, 18, 18, 17. Για τα ίδια διαγωνίσματα, ο Βασίλης είχε πάρει 2 μονάδες περισσότερες, σε κάθε διαγώνισμα, από τον Αντρέα, ενώ ο Γιάννης είχε πάρει 4 μονάδες λιγότερες από τον Αντρέα, σε κάθε διαγώνισμα. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του κάθε παιδιού.

Λύση

Η μέση τιμή (ο μέσος όρος) των βαθμών του Ανδρέα είναι το άθροισμα των βαθμών δια το πλήθος των μαθημάτων, δηλαδή: $\frac{15+18+18+17}{4}=17$. Ομοίως βρίσκουμε ότι για το Βασίλη είναι $\frac{17+20+20+19}{4}=19$ και για το Γιάννη $\frac{11+14+14+13}{4}=13$. Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή των βαθμών του Βασίλη είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερη εκείνης του Ανδρέα. Αυτό οφείλεται στις 2 μονάδες που έχει πάρει παραπάνω ο Βασίλης από τον Ανδρέα σε κάθε μάθημα. Ομοίως, αφού κάθε βαθμός του Γιάννη είναι κατά 4 μικρότερος του αντίστοιχου βαθμού του Ανδρέα, ο μέσος όρος του Γιάννη θα είναι κατά 4 βαθμούς μικρότερος του μέσου όρου του Ανδρέα. (βλέπε και εφαρμογή 2)

Άσκηση 2

Αν ο μέσος όρος του μηνιαίου μισθού των υπαλλήλων ενός εργοστασίου πέρυσι ήταν 850€ και φέτος σε κάθε υπάλληλο δοθεί αύξηση 50€, να βρείτε τον νέο μέσο όρο των μισθών.

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των υπαλλήλων είναι ν, τότε το άθροισμα των μισθών όλων των υπαλλήλων την περσινή χρονιά θα ήταν $\nu \cdot 850$ € και τη φετινή χρονιά θα είναι $\nu \cdot 850 + \nu \cdot 50$ €, οπότε ο νέος μέσος όρος των μισθών θα είναι $\frac{\nu \cdot 850 + \nu \cdot 50}{\nu} = 900$€.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε χωρίς τους παραπάνω υπολογισμούς που έχουν ως αφετηρία την υπόθεση ότι το πλήθος των υπαλλήλων είναι ν. Εφόσον κάθε μισθός αυξήθηκε κατά 50€, και ο μέσος όρος θα έχει αυξηθεί κατά 50€.

Επέκταση: Με δεδομένο ότι ο βασικός μισθός το 2019 είναι 650€, και για έγγαμο εργαζόμενο με προϋπηρεσία τριών χρόνων διαμορφώνεται στα 780€, ποιοι θα μπορούσε να είναι οι μισθοί 100 υπαλλήλων αν η μέση τιμή είναι 900€; Μπορείτε να σκεφτείτε ένα παράδειγμα τέτοιο ώστε η δήλωση "ο μέσος μισθός των υπαλλήλων του εργοστασίου είναι 900€" να είναι παραπλανητική, ακόμα κι αν είναι στατιστικά σωστή;

Άσκηση 3

Καθεμία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων έχουν μέση τιμή 50.

(I) 0, 20, 40, 50, 60, 80, 100

(II) 0, 48, 49, 50, 51, 52, 100

(III) 0, 1, 2, 50, 98, 99, 100

1) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το εύρος για σύγκριση της μεταβλητότητας των δεδομένων αυτών;

2) Χωρίς να γίνουν οι πράξεις, να βρείτε σε ποια λίστα υπάρχει μεγαλύτερη και σε ποια μικρότερη διασπορά παρατηρήσεων.

Λύση

1) Για όλες τις λίστες δεδομένων το εύρος είναι $100-0=100$. Οπότε, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εύρος για να διακρίνουμε διαφορές στη μεταβλητότητα μεταξύ των τριών ομάδων δεδομένων.

2) Αναζητώντας ποια ομάδα έχει περισσότερο διάσπαρτα δεδομένα, παρατηρούμε καταρχάς ότι όλες περιλαμβάνουν το 0, το 50 και το 100. Πέραν αυτών των τριών, στη δεύτερη ομάδα (0, 48, 49, 50, 51, 52, 100) τα υπόλοιπα δεδομένα βρίσκονται πολύ κοντά στο κέντρο (που είναι η μέση τιμή, δηλ. το 50). Στην τρίτη ομάδα (0, 1, 2, 50, 98, 99, 100) τα υπόλοιπα δεδομένα βρίσκονται μακριά από το κέντρο (πιο κοντά στα άκρα 0 και 100). Τέλος, στην πρώτη ομάδα (0, 20, 40, 50, 60, 80, 100) οι τιμές 20, 40, 60, 80 είναι πιο ομαλά τοποθετημένες ανάμεσα στα άκρα (0 και 100) και στο κέντρο (50).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τη μεγαλύτερη διασπορά έχει η τρίτη λίστα, τη μικρότερη διασπορά έχει η δεύτερη λίστα, ενώ η διασπορά της πρώτης λίστας βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις δύο άλλες.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο για τα παρακάτω δείγματα δεδομένων και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα:

α) 1, 2, 6 β) 2, 4, 12 γ) 11, 12, 16 δ) 12, 14, 22

Λύση

Για τη μέση τιμή των τεσσάρων δειγμάτων έχουμε αντιστοίχως:

$$\bar{x}_1 = \frac{1+2+6}{3} = 3, \qquad \bar{x}_2 = \frac{2+4+12}{3} = 6,$$

$$\bar{x}_3 = \frac{11+12+16}{3} = 13, \qquad \bar{x}_4 = \frac{12+14+22}{3} = 16$$

Ενώ για τις διαμέσους έχουμε αντιστοίχως:

$\delta_1 = 2, \qquad \delta_2 = 4, \qquad \delta_3 = 12, \qquad \delta_4 = 14$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές του δεύτερου δείγματος είναι διπλάσιες των τιμών του πρώτου και για αυτό ισχύει $\bar{x}_2 = 2 \cdot \bar{x}_1$ και $\delta_2 = 2 \cdot \delta_1$.

Οι τιμές του τρίτου δείγματος προέρχονται από τις τιμές του πρώτου αν τις αυξήσουμε κατά 10 και για αυτό ισχύει $\bar{x}_3 = \bar{x}_1 + 10$ και $\delta_3 = \delta_1 + 10$.

Τέλος, οι τιμές του τέταρτου δείγματος προκύπτουν αν διπλασιάσουμε τις τιμές του πρώτου και στο αποτέλεσμα προσθέσουμε 10. Για το λόγο αυτό ισχύει $\bar{x}_4 = 2 \cdot \bar{x}_1 + 10$ και $\delta_4 = 2 \cdot \delta_1 + 10$.

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση για καθεμιά από τις παρακάτω λίστες δεδομένων. Συγκρίνοντας τα δεδομένα και τα αποτελέσματα, τι συμπέρασμα βγάζετε;

α) 1, 3, 4, 5, 7   β) 3, 9, 12, 15, 21   γ) 6, 8, 9, 10, 12   δ) -1, -3, -4, -5, -7

<u>Λύση</u>

Για την (α) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\bar{x}_\alpha = \frac{1+3+4+5+7}{5} = 4$$

$$s_\alpha^2 = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

και $s_\alpha = \sqrt{4} = 2$

Για τη (β) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\bar{x}_\beta = \frac{3+9+12+15+21}{5} = 12$$

$$s_\beta^2 = \frac{(3-12)^2 + (9-12)^2 + (12-12)^2 + (15-12)^2 + (21-12)^2}{5} = \frac{81+9+0+9+81}{5} = 36$$

και $s_\beta = \sqrt{36} = 6$

Για τη (γ) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\overline{x}_{\gamma} = \frac{6+8+9+10+12}{5} = 9$$

$$s_{\gamma}^{2} = \frac{(6-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2 + (10-9)^2 + (12-9)^2}{5} = \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

και $s_{\gamma} = \sqrt{4} = 2$

Τέλος, για τη (δ) ομάδα δεδομένων έχουμε:

$$\overline{x}_{\delta} = \frac{(-1)+(-3)+(-4)+(-5)+(-7)}{5} = -4$$

$$s_{\delta}^{2} = \frac{(-1-(-4))^2 + (-3-(-4))^2 + (4-(-4))^2 + (5-(-4))^2 + (7-(-4))^2}{5} =$$

$$= \frac{9+1+0+1+9}{5} = 4$$

και $s_{\delta} = \sqrt{4} = 2$

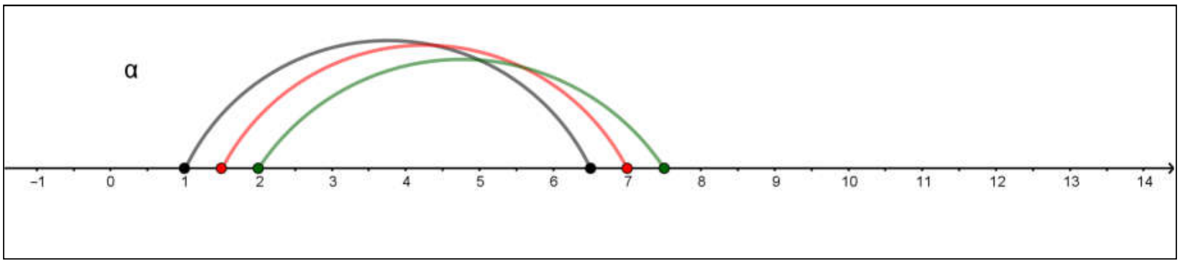
Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα δεδομένα της πρώτης ομάδας επί 3 παίρνουμε τα δεδομένα της δεύτερης. Η διακύμανση της δεύτερης ομάδας είναι 9πλάσια ($9=3^2$) της διακύμανσης της πρώτης και η τυπική απόκλιση είναι τριπλάσια. Δηλαδή: $s_{\beta}^{2} = 3^2 \times s_{\alpha}^{2}$ και $s_{\beta} = 3 \times s_{\alpha}$

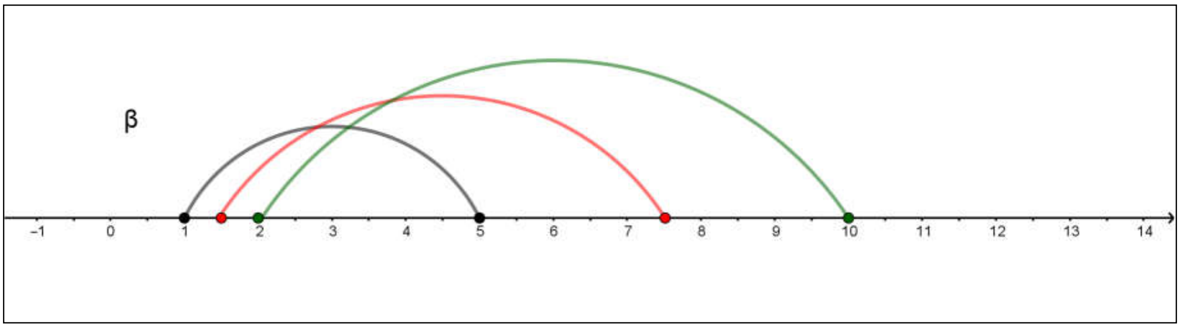
Αν στα δεδομένα της πρώτης ομάδας προσθέσουμε 5, παίρνουμε τα δεδομένα της τρίτης ομάδας. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση της τρίτης ομάδας παραμένουν ίδιες με της πρώτης. Δηλαδή: $s_{\gamma}^{2} = s_{\alpha}^{2}$ και $s_{\gamma} = s_{\alpha}$.

Τέλος, τα δεδομένα της τέταρτης ομάδας είναι τα αντίθετα της πρώτης, ή αλλιώς προκύπτουν από τα δεδομένα της πρώτης με πολλαπλασιασμό επί (-1). Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση της τέταρτης ομάδας παραμένουν ίδιες με της πρώτης. Δηλαδή: $s_{\delta}^{2} = s_{\alpha}^{2}$ και $s_{\delta} = s_{\alpha}$.

Συνοψίζοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι πολλαπλασιάζοντας τα δεδομένα με κάποιον αριθμό, η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται με την απόλυτη τιμή του αριθμού. Αν όμως προσθέσουμε σε όλα τα δεδομένα τον ίδιο αριθμό, η τυπική απόκλιση δεν μεταβάλλεται.

Σχηματικά, με την πρόσθεση του ίδιου αριθμού σε όλα τα δεδομένα, τα μετατοπίζουμε στον άξονα, χωρίς να αλλάζουμε τις μεταξύ τους αποστάσεις (βλέπε σχήμα α). Αλλά πολλαπλασιάζοντάς τα με τον ίδιο αριθμό τα μετατοπίζουμε και οι μεταξύ τους αποστάσεις πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό (βλέπε σχήμα β).





Χρησιμοποιώντας συμβολική γλώσσα, τα παραπάνω διατυπώνονται ως εξής:

Αν συμβολίσουμε $x_{\alpha1} = 1$, $x_{\alpha2} = 3$, $x_{\alpha3} = 4$, $x_{\alpha4} = 5$, $x_{\alpha5} = 7$, δηλαδή αν συμβολίσουμε με $x_{\alpha i}, i = 1,2,3,4,5$ τα δεδομένα της (α) ομάδας, και με $x_{\beta i}$, $x_{\gamma i}$, $x_{\delta i}$ τα δεδομένα των (β), (γ) και (δ) ομάδων αντιστοίχως, τότε έχουμε:

$x_{\beta i} = 3 \cdot x_{\alpha i}$, $x_{\gamma i} = x_{\alpha i} + 5$, $x_{\delta i} = -x_{\alpha i} = (-1) \cdot x_{\alpha i}$

Για τις αντίστοιχες διακυμάνσεις και τυπικές αποκλίσεις έχουμε:

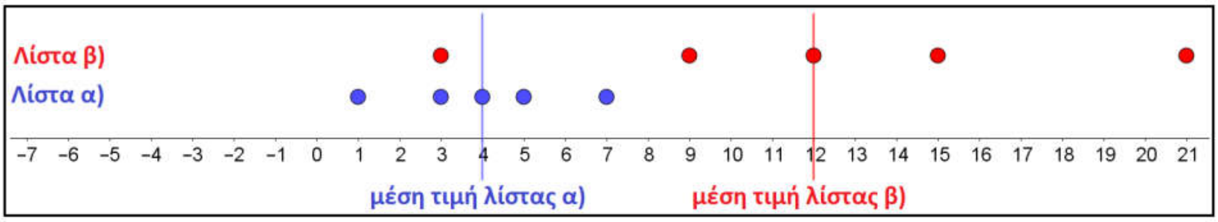
$s_\beta^2 = 3^2 \cdot s_\alpha^2$ και $s_\beta = 3 \cdot s_\alpha$

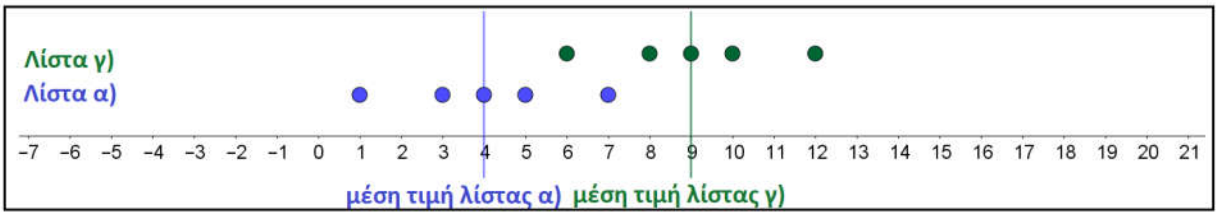
$s_\gamma^2 = s_\alpha^2$ και $s_\gamma = s_\alpha$

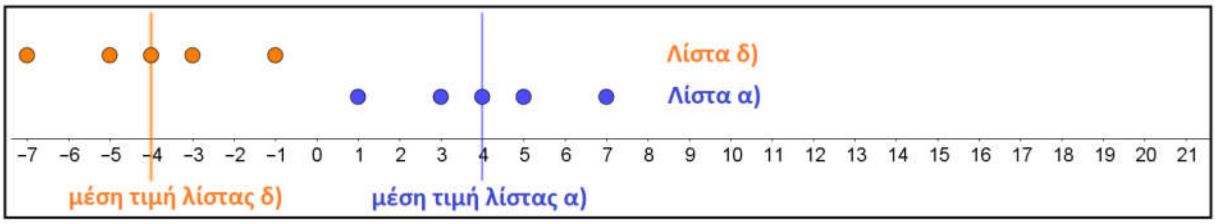
$s_\delta^2 = (-1)^2 \cdot s_\alpha^2 = s_\alpha^2$ και $s_\delta = s_\alpha$.

Σε κάθε μία από τις τρεις παρακάτω γραφικές παραστάσεις βρίσκονται τοποθετημένες, σε μία νοητή ευθεία, πάνω από μία αριθμογραμμή, οι τιμές της λίστας δεδομένων α). Επίσης στην 1η, τη 2η και την 3η γραφική παράσταση βρίσκονται οι τιμές της λίστας β), της λίστας γ) και της λίστας δ), αντίστοιχα, κατά τον ίδιο τρόπο, ώστε σε κάθε περίπτωση να μπορούν να γίνουν συγκρίσεις.

Επίσης, σε κάθε γραφική παράταση, παριστάνεται η «θέση» της μέσης τιμής κάθε λίστας με μία κατακόρυφη γραμμή, του αντίστοιχου χρώματος. Τα συμπεράσματα των παραπάνω αλγεβρικών συλλογισμών (για τις μεταβολές στη μέση τιμή, αλλά και τη διασπορά) φαίνονται σε αυτές τις γραφικές παραστάσεις.







Άσκηση 6

Η βαθμολογία 16 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 8, 15, 13, 20, 9, 13, 17, 19, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 17. Να υπολογίσετε:

1) Τα τρία μέτρα θέσης, μέση τιμή, διάμεσο και επικρατούσα τιμή.

2) Το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Λύση

1) Για τη μέση τιμή (το μέσο όρο των βαθμών) έχουμε:

$$\overline{x} = \frac{8+15+13+20+9+13+17+19+20+9+10+10+15+13+14+17}{16} = 13,875$$

Για να βρούμε τη διάμεσο διατάσσουμε τα δεδομένα (τους βαθμούς των μαθητών) σε αύξουσα σειρά: 8, 9, 9, 10, 10, 13, 13, 13, 14, 15, 15, 17, 17, 19, 20, 20.

Η διάμεσος των 16 παρατηρήσεων είναι ο μέσος όρος της 8^{ης} και της 9^{ης} παρατήρησης, δηλαδή $\delta = \dfrac{13+14}{2} = 13,5$

Η επικρατούσα τιμή είναι το 13, δηλαδή $M_0 = 13$.

2) Το εύρος είναι $R = 20 - 8 = 12$.

Για την τυπική απόκλιση έχουμε:

$$s = \sqrt{\frac{(8-13,875)^2 + (9-13,875)^2 + \ldots + (20-13,875)^2}{16}} \simeq 3,85$$

Για να διευκολύνουμε τους υπολογισμούς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα λογιστικό φύλλο για να κατασκευάσουμε τον παρακάτω πίνακα:

παρατήρηση x_i	συχνότητα ν_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$\nu_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
8	1	34,51563	34,51563
9	2	23,76563	47,53125
10	2	15,01563	30,03125
13	3	0,765625	2,296875
14	1	0,015625	0,015625
15	2	1,265625	2,53125
17	2	9,765625	19,53125
19	1	26,26563	26,26563
20	2	37,51563	75,03125
		Σύνολο:	237,75

Οπότε, $s = \sqrt{\dfrac{237,75}{16}} \simeq 3,85$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έτοιμα εργαλεία του λογιστικού φύλλου για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση.

Τέλος, ο συντελεστής μεταβολής είναι: $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{3,85}{13,875} \simeq 28\%$

Άσκηση 7

Η μέση τιμή ηλικίας των υπαλλήλων μιας εταιρείας είναι 32 χρόνια. Ποια θα είναι η μέση τιμή ηλικίας των ίδιων υπαλλήλων ύστερα από τρία χρόνια;

<u>Λύση</u>

Με δεδομένο ότι κανείς υπάλληλος δεν αποχωρεί και κανείς νέος δεν προσλαμβάνεται, εφόσον όλες οι ηλικίες θα έχουν αυξηθεί κατά 3 χρόνια, η μέση τιμή θα έχει αυξηθεί κι αυτή κατά 3 χρόνια και θα είναι 35 χρόνια.

Άσκηση 8

Οι βαθμοί στα Μαθηματικά 20 μαθητών της Β΄ τάξης ενός Λυκείου είναι:

12	14	15	13	17	15	16	14	18	15	17	13	19	15	16	12	16	18	13	14

1) Να βρείτε τη μέση τιμή και την επικρατούσα τιμή.

2) Να βρείτε τη διάμεσο.

3) Να βρείτε το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

4) Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα.

Λύση

Για διευκόλυνση διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19.

1) Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \dfrac{12+12+13+\ldots = 19}{20} = \dfrac{302}{20} = 15,1$

Η επικρατούσα τιμή είναι $M_0 = 15$

2) Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της $10^{ης}$ και $11^{ης}$ παρατήρησης, δηλαδή:

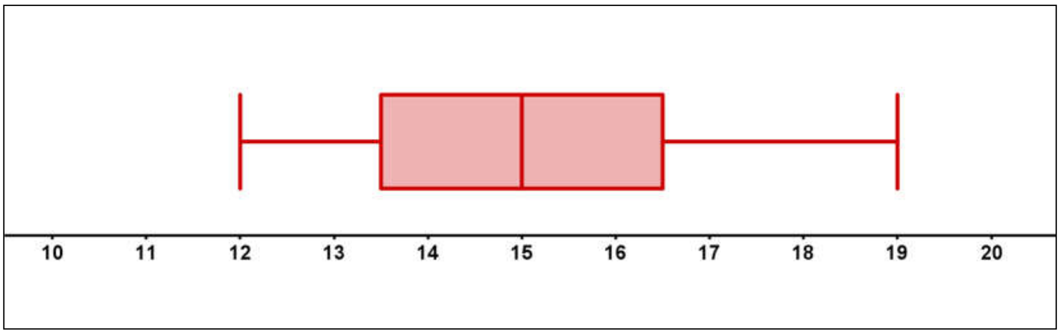
$$\delta = \frac{15+15}{2} = 15$$

3) Το πρώτο τεταρτημόριο είναι ο μέσος όρος της $5^{ης}$ και της $6^{ης}$ παρατήρησης, ενώ το τρίτο τεταρτημόριο είναι ο μέσος όρος της $15^{ης}$ και $16^{ης}$ παρατήρησης. Δηλαδή έχουμε:

$$Q_1 = \frac{13+14}{2} = 13,5 \text{ και } Q_3 = \frac{16+17}{2} = 16,5$$

4) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 16,5 - 13,5 = 3$.

Το διάστημα $[Q_1 - 1,5 \cdot Q\ ,\ \ Q_3 + 1,5 \cdot Q]$ είναι το $[9,21]$ στο οποίο περιλαμβάνονται όλες οι τιμές (άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές). Το θηκόγραμμα φαίνεται παρακάτω:



Στο θηκόγραμμα βλέπουμε την ελάχιστη τιμή (12), τη μέγιστη τιμή (19), τη διάμεσο (15) και το πρώτο και τρίτο τεταρτημόρια (13,5 και 16,5 αντιστοίχως).

Πρόσθετο υλικό – Σύνθετες ασκήσεις

Άσκηση 1

Η μέση επίδοση 17 αγοριών και 13 κοριτσιών στο μάθημα των Μαθηματικών μιας τάξης είναι 16,8. Η μέση επίδοση των κοριτσιών είναι 15,6. Να βρείτε τη μέση επίδοση των αγοριών

Λύση

Αν ονομάσουμε $\overline{x}_\alpha$ τη μέση επίδοση των αγοριών και $\overline{x}_\kappa$ τη μέση επίδοση των κοριτσιών, τότε το άθροισμα των βαθμολογιών των αγοριών είναι $17 \cdot \overline{x}_\alpha$ και το άθροισμα των βαθμολογών των κοριτσιών είναι $13 \cdot \overline{x}_\kappa = 13 \cdot 15,6$ (αυτό συμβαίνει επειδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε αγόρι έχει επίδοση ίση με τη μέση επίδοση των αγοριών και ότι κάθε κορίτσι έχει επίδοση ίση με τη μέση επίδοση των κοριτσιών).

Τότε θα ισχύει $\dfrac{17 \cdot \overline{x}_\alpha + 13 \cdot 15,6}{30} = 16,8$.

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε τη μέση επίδοση των αγοριών $\overline{x}_\alpha \simeq 17,7$.

Άσκηση 2

Σε ένα Λύκειο υπάρχουν 500 μαθητές. Η Α΄ τάξη έχει 200 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 15,7 χρόνια, ενώ η Β΄ τάξη έχει 180 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας 16,9 χρόνια. Οι υπόλοιποι μαθητές της Γ΄ τάξης έχουν μέσο όρο ηλικίας 17,7 χρόνια. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο ηλικίας όλων των μαθητών του σχολείου.

Λύση

Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης είναι $500 - \left(200 + 180\right) = 120$.

Το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Α΄ τάξης θα είναι $200 \cdot 15,7$ το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Β΄ τάξης θα είναι $180 \cdot 16,9$ και το άθροισμα των ηλικιών των μαθητών της Γ΄ τάξης θα είναι $120 \cdot 17,7$. Οπότε, η μέση ηλικία των μαθητών του σχολείου θα είναι $\dfrac{200 \cdot 15,7 + 180 \cdot 16,9 + 120 \cdot 17,7}{500} \simeq 16,6$

Άσκηση 3

Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειώνονται κατά 2 και οι 9 αυξάνονται κατά 6, να βρεθεί η νέα μέση τιμή

Λύση

Το άθροισμα των τιμών όλων των παρατηρήσεων θα είναι $40 \times 20 = 800$ και μετά τις μεταβολές θα είναι $800 - 7 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 840$. Οπότε, η νέα μέση τιμή θα είναι $\dfrac{840}{40} = 21$.

Άσκηση 4

Η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με ν παρατηρήσεις είναι ίση με μηδέν. Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις;

Λύση

Η τυπική απόκλιση είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης (s^2), η οποία ορίζεται ως "η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών της μέσης τιμής των παρατηρήσεων από τις παρατηρήσεις". Για να είναι η τυπική απόκλιση ίση με 0, και η διακύμανση θα είναι ίση με 0, άρα κάθε παρατήρηση θα διαφέρει από τη μέση τιμή κατά 0 (ας θυμηθούμε ότι αν το άθροισμα μη αρνητικών πραγματικών είναι μηδέν τότε όλοι οι προσθετέοι είναι μηδέν). Δηλαδή, όλες οι παρατηρήσεις θα είναι μεταξύ τους ίσες.

Άσκηση 5

Η μέση τιμή 6 διαδοχικών ακέραιων αριθμών είναι 7,5. Να υπολογίσετε την τυπική τους απόκλιση.

Λύση

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι 6 διαδοχικοί ακέραιοι που έχουν μέση τιμή 7,5 είναι οι:

5, 6, 7, 8, 9, 10.

Η τυπική τους απόκλιση θα είναι:

$$s = \sqrt{\frac{(5 - 7,5)^2 + (6 - 7,5)^2 + (7 - 7,5)^2 + (8 - 7,5)^2 + (9 - 7,5)^2 + (10 - 7,5)^2}{6}} \simeq 1,7$$

Σχόλιο: Ένας τρόπος να βρούμε τους 6 διαδοχικούς ακεραίους με μέση τιμή 7,5, είναι να ονομάσουμε με ν τον μικρότερο, οπότε οι επόμενοι είναι ν+1, ν+2, ν+3, ν+4, ν+5 και να λύσουμε την εξίσωση: $\frac{\nu + (\nu + 1) + (\nu + 2) + (\nu + 3) + (\nu + 4) + (\nu + 5)}{6} = 7,5$

Ένας άλλος (προφανώς πιο εύκολος) είναι να "μοιράσουμε" έξι διαδοχικούς αριθμούς έτσι ώστε το 7,5 να βρίσκεται στη μέση τους, άρα θα είναι τρεις κάτω από το 7,5 και τρεις πάνω από αυτό.

Άσκηση 6

Αν σε μία τάξη ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_1 αγοριών είναι $\overline{x}$ και ο μέσος όρος της βαθμολογίας ν_2 κοριτσιών είναι $\overline{y}$, να αποδείξετε ότι ο μέσος όρος της βαθμολογίας όλων των παιδιών της τάξης είναι $\overline{z} = \frac{\nu_1\overline{x} + \nu_2\overline{y}}{\nu_1 + \nu_2}$.

Λύση

Για τις ανάγκες του συγκεκριμένου προβλήματος, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε αγόρι έχει βαθμολογία $\overline{x}$ και κάθε κορίτσι έχει $\overline{y}$. Άρα το άθροισμα των βαθμών των αγοριών είναι $\nu_1\overline{x}$, το άθροισμα των βαθμών των κοριτσιών είναι $\nu_2\overline{y}$ και το άθροισμα των βαθμών όλων των μαθητών/τριών είναι $\nu_1\bar{x}+\nu_2\bar{y}$. Αφού όλοι οι μαθητές είναι $\nu_1+\nu_2$, ο μέσος όρος της βαθμολογίας θα είναι: $\bar{z}=\dfrac{\nu_1\bar{x}+\nu_2\bar{y}}{\nu_1+\nu_2}$.

Άσκηση 7

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή είναι το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Λύση

Αν οι τιμές των παρατηρήσεων είναι x_i με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, και το σύνολο των παρατηρήσεων είναι ν, τότε: $\bar{x}=\dfrac{\nu_1x_1+\nu_2x_2+\ldots+\nu_\kappa x_\kappa}{\nu}$.

Οπότε, $\bar{x}=\dfrac{\nu_1x_1}{\nu}+\dfrac{\nu_2x_2}{\nu}+\ldots+\dfrac{\nu_\kappa x_\kappa}{\nu}=\dfrac{\nu_1}{\nu}x_1+\dfrac{\nu_2}{\nu}x_2+\ldots+\dfrac{\nu_\kappa}{\nu}x_\kappa$

Άρα $\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_\kappa x_\kappa$

Δηλαδή, η μέση τιμή είναι ίση με το άθροισμα των γινομένων των τιμών της μεταβλητής επί τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες.

Άσκηση 8

Σε ένα εργοστάσιο με 100 εργαζόμενους η μέση τιμή των αμοιβών τους είναι 900€. Οι 40 από αυτούς πληρώνονται με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής και οι μισθοί τους έχουν μέση τιμή 800€. Αν οι αποδοχές των εργαζομένων με μισθό μικρότερο της μέσης τιμής αυξηθούν και γίνουν όσο η μέση τιμή, τότε ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των αμοιβών των 100 εργαζομένων;

Λύση

Το άθροισμα των αμοιβών των 100 εργαζομένων πριν οποιαδήποτε αύξηση είναι $100\cdot900=90.000$ €. Αφού οι αποδοχές των 40 χαμηλότερα αμειβόμενων εργαζομένων θα γίνουν όσο η μέση τιμή, δηλαδή 900€, αυτοί οι εργαζόμενοι θα έχουν μια μέση αύξηση κατά 100€, άρα αθροιστικά αύξηση $40\cdot100=4.000$ €. Οπότε, το άθροισμα των αμοιβών των 100 εργαζομένων διαμορφώνεται στις 94.000 €. Έτσι, η νέα μέση τιμή θα είναι $\dfrac{94.000}{100}=940$ €.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.4 : ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Το σύνολο των μαθητών/τριών μιας πόλης, ρωτήθηκαν για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο. Το 50% περίπου έδωσε απαντήσεις που ήταν από 12 λεπτά και πάνω, ενώ το 16% περίπου έδωσε απαντήσεις που ήταν από 10 λεπτά και κάτω. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής σπίτι-σχολείο των μαθητών είναι κανονική.

1) Να εκτιμήσετε τον μέσο χρόνο διαδρομής σπίτι-σχολείο, των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους, σύμφωνα με τις απαντήσεις τους.

2) Αν οι μαθητές/τριες της πόλης είναι 4.000, να εκτιμήσετε πόσοι/ες απάντησαν ότι έχουν χρόνο διαδρομής σπίτι-σχολείο μεταξύ 14 και 16 λεπτών;

Λύση

1) Σε μια κανονική κατανομή το 50% περίπου του πληθυσμού είναι πάνω από μ. Οπότε, αφού το 50% περίπου έδωσε απαντήσεις που ήταν από 12 λεπτά και πάνω, θα είναι μ=12. Επιπλέον, το 100%-68%=32% περίπου του πληθυσμού αναμένεται να έδωσαν απαντήσεις κάτω από μ-σ και πάνω από μ+σ, οπότε το 16% των απαντήσεων αναμένεται να είναι κάτω από μ-σ. Οπότε, θα είναι μ-σ=10, και άρα σ=2. Δηλαδή εκτιμούμε ότι μ=12 λεπτά και σ=2 λεπτά.

2) 14=μ+σ και 16=μ+2σ. Οπότε μεταξύ 14 και 16 αναμένεται ότι απάντησαν περίπου $\frac{95\% - 68\%}{2} = 13,5\%$ των μαθητών

Άσκηση 2

Υποθέτουμε ότι το βάρος των μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική κατανομή και παίρνουμε ένα μεγάλο δείγμα μαθητών λυκείου. Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

1) Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

2) Να εκτιμήσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Λύση

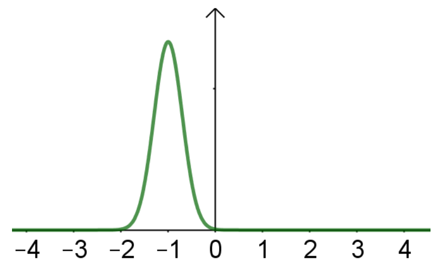
1) Αφού το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, θα είναι μ=65kg. Αφού το $\frac{95\%}{2} = 47,5\%$ έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg θα είναι 75=μ+2σ, και άρα σ=5. Δηλαδή, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι μ=65kg και σ=5kg.

2) Επειδή 55=μ-2σ και 70=μ+σ, στο διάστημα (55,70), δηλαδή στο (μ-2σ,μ+σ) αναμένεται να έχουν βάρος περίπου το $68\% + \frac{95\% - 68\%}{2} = 81,5\%$ των μαθητών.

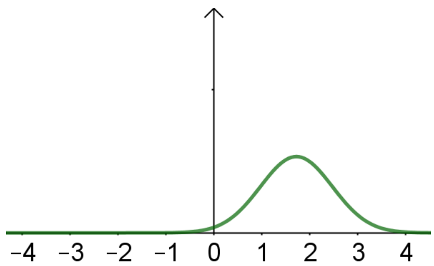
Άσκηση 3

1) Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που είναι μοντέλα κανονικών κατανομών και περιέχονται στον παρακάτω πίνακα με τα ζεύγη τιμών των παραμέτρων σ και μ που ακολουθούν. Ο κατακόρυφος άξονας των συστημάτων συντεταγμένων ακολουθεί την ίδια κλίμακα σε όλες τις περιπτώσεις.

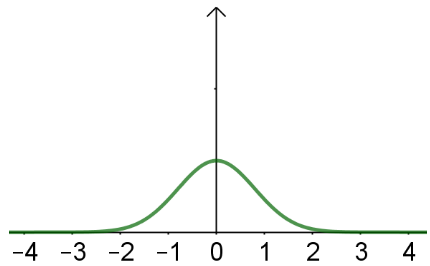
Πίνακας



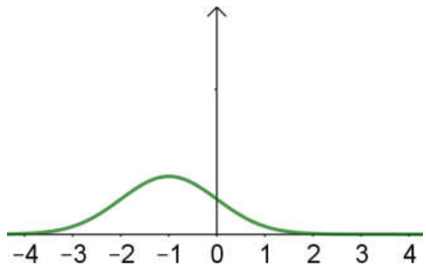
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Α. $\mu = -1, \quad \sigma = 1$, **Β.** $\mu = -1, \quad \sigma = 0,3$, **Γ.** $\mu > 0, \quad \sigma = 0,75$ **Δ.** $\mu = 0, \quad \sigma < 1$

2) Να συγκρίνετε την τιμή του σ στο σχήμα (γ) με το 0,3.

Λύση

1) α–Β, β–Γ, γ–Δ, δ–Α.

2) Το εύρος είναι περίπου 4 (μεταξύ του -2 και του 2 φαίνεται να είναι σχεδόν το 100% των παρατηρήσεων). Άρα, $6\sigma \simeq 4$, οπότε $\sigma \simeq 0,66$, άρα $\sigma > 0,3$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.5 : ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΥΝΑΦΕΙΑΣ ΚΑΙ ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Για ποια από τα επόμενα ζεύγη μεταβλητών θα κατασκευάζατε πίνακα συνάφειας; Για εκείνα που θα επιλέξετε, να προσδιορίσετε την ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή για την έρευνά σας.

α) φύλο και επίπεδο εκπαίδευσης

β) φύλο και χρήση διαδικτύου (σε ώρες/ημέρα)

γ) βαθμός στην Άλγεβρα και ώρες μελέτης (ανά εβδομάδα)

δ) ικανοποίηση από το σχολείο και φύλο

ε) ευτυχία στο γάμο και πίστη στα θαύματα

Λύση

Οι πίνακες συνάφειας χρησιμοποιούνται για την αναζήτηση σχέσεων ανάμεσα σε δύο ποιοτικές μεταβλητές. Οπότε, για τις (α) και (ε) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πίνακες συνάφειας, ενώ για τις (β) και (γ) όχι, εφόσον η χρήση διαδικτύου, ο βαθμός και οι ώρες μελέτης είναι ποσοτικές μεταβλητές. Για την περίπτωση (δ), το φύλο είναι ποιοτική μεταβλητή, αλλά η ικανοποίηση θα μπορούσε να είναι ποιοτική (αν εκφραζόταν με το καθόλου/λίγο/αρκετά/πολύ ή με κάτι παρόμοιο) ή θα μπορούσε να είναι ποσοτική (αν εκφραζόταν πχ σε μια ποσοστιαία κλίμακα). Οπότε αντιστοίχως, θα μπορούσαμε ή όχι να χρησιμοποιήσουμε πίνακες συνάφειας.

Άσκηση 2

Σε μια έρευνα του τρόπου ζωής και των καθημερινών συνηθειών στη χώρα μας συλλέχθηκε ένα δείγμα 833 ατόμων απ' όλη την επικράτεια, προκειμένου να εξετάσουμε εάν υπάρχει σχέση μεταξύ του επίπεδου εκπαίδευσης (δευτεροβάθμια, αν έχουν ολοκληρώσει το Λύκειο και τριτοβάθμια, αν έχουν ολοκληρώσει τις σπουδές τους σε ΑΕΙ) και της συστηματικής σωματικής άσκησης τους (ναι: τουλάχιστον 2 φορές την εβδομάδα και όχι: το πολύ μια φορά την εβδομάδα) σε όλη τη διάρκεια ενός έτους. Τα δεδομένα οργανώθηκαν στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

		Άσκηση		
		Ναι	**Όχι**	**Σύνολο**
Εκπαίδευση	**Δευτεροβάθμια**	**366**	**75**	
	Τριτοβάθμια	**303**	**89**	
	Σύνολο			

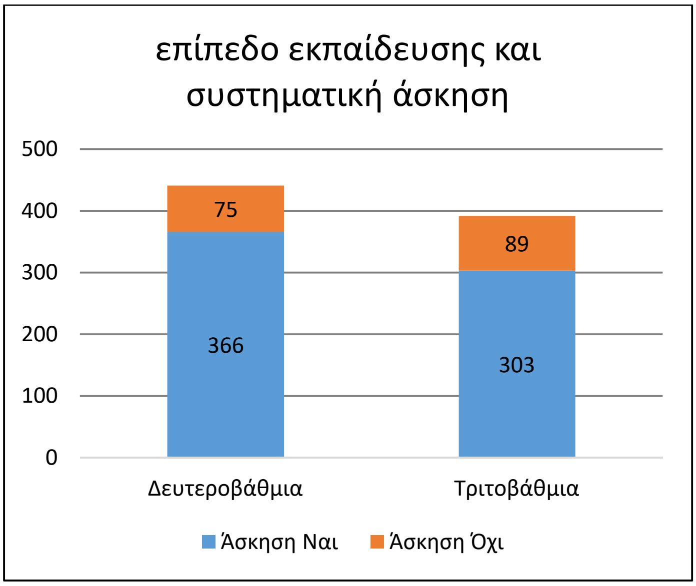
α) Να συμπληρώσετε στον παραπάνω πίνακα τα κενά κελιά και να κατασκευάσετε το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα των συχνοτήτων του πίνακα συνάφειας.
β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς το επίπεδο εκπαίδευσης και το αντίστοιχο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του.
γ) Μπορείτε να υποστηρίξετε την άποψη ότι το επίπεδο εκπαίδευσης επηρεάζει το αν κάποιο άτομο ασκείται συστηματικά ή όχι;

Λύση

α) Ο πίνακας συνάφειας φαίνεται συμπληρωμένος παρακάτω:

		Άσκηση		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δευτεροβάθμια	366	75	441
	Τριτοβάθμια	303	89	392
	Σύνολο	669	164	833

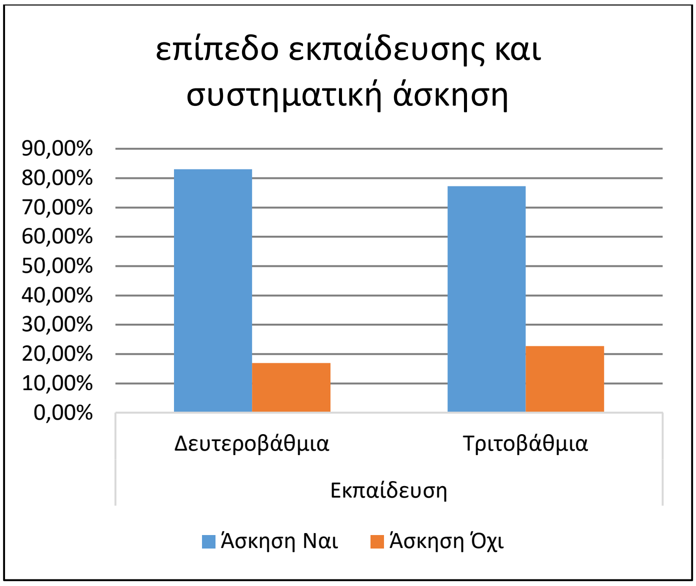
Το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα των συχνοτήτων αυτού του πίνακα είναι το εξής:



β) Ο πίνακας συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς το επίπεδο εκπαίδευσης είναι ο εξής:

		Άσκηση		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δευτεροβάθμια	82,99%	17,01%	100,00%
	Τριτοβάθμια	77,30%	22,70%	100,00%
	Σύνολο			

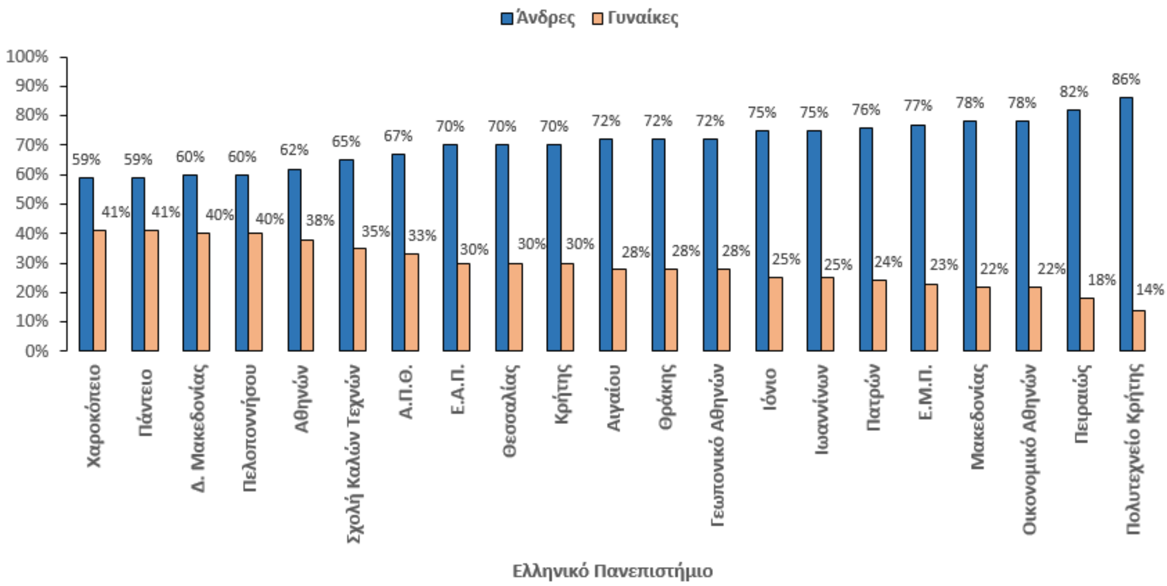
και το αντίστοιχο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του:



γ) Κυρίως από τον πίνακα συνάφειας και το ραβδόγραμμα του (β) ερωτήματος, φαίνεται ότι εκείνοι που έχουν ολοκληρώσει σπουδές σε ΑΕΙ ασκούνται ελαφρώς λιγότερο από εκείνους που έχουν ολοκληρώσει το Λύκειο.

Άσκηση 3

Το επόμενο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων δίνει τα ευρήματα μιας μελέτης που έγινε το 2016 στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών για τη θέση των γυναικών στα Ελληνικά Πανεπιστήμια, η οποία δημοσιεύθηκε σε κυριακάτικη εφημερίδα. Πιο συγκεκριμένα, δίνονται τα ποσοστά ανδρών και γυναικών μόνιμων διδασκόντων στα Πανεπιστήμια.



α) Σε ποια Πανεπιστήμια παρατηρείται το μεγαλύτερο ποσοστό γυναικών και σε ποια το χαμηλότερο;

β) Τη συγκεκριμένη χρονιά δίδαξαν συνολικά 8.483 μόνιμοι διδάσκοντες εκ των οποίων οι 5.894 ήταν άνδρες και οι 2.589 ήταν γυναίκες. Να βρείτε σε ποια πανεπιστήμια το ποσοστό των γυναικών ξεπέρασε το γενικό μέσο ποσοστό τους;

γ) Ποιος πιστεύετε ότι μπορεί να ήταν ο τίτλος του άρθρου και για ποιο λόγο μια εφημερίδα το ανέδειξε ως ένα από τα κύρια κοινωνικά άρθρα της;

<u>Λύση</u>

α) Το μεγαλύτερο ποσοστό γυναικών μόνιμων διδασκόντων παρατηρείται στο Χαροκόπειο και στο Πάντειο (41%) και το χαμηλότερο στο Πολυτεχνείο Κρήτης (14%)

β) Στο σύνολο των Ελληνικών Πανεπιστημίων, το ποσοστό των γυναικών μόνιμων διδασκόντων είναι $\frac{2589}{8483} \simeq 0,30519 \simeq 30,5\%$. Οπότε, το ποσοστό των γυναικών ξεπέρασε το γενικό μέσο ποσοστό τους στα εξής Πανεπιστήμια: Χαροκόπειο, Πάντειο, Δυτικής Μακεδονίας, Πελοποννήσου, Αθηνών, Σχολή Καλών Τεχνών και ΑΠΘ.

γ) Τίτλοι του άρθρου θα μπορούσαν να είναι: "Η συμμετοχή των γυναικών ως διδάσκουσες στο Πανεπιστήμιο", ή "Το Ελληνικό Πανεπιστήμιο ανδροκρατείται", ή "Μόνο 1 στις 3 διδάσκοντες στο Πανεπιστήμιο είναι γυναίκα". Το σημαντικό κοινωνικό θέμα που αναδεικνύεται από αυτή την έρευνα, είναι το χαμηλό ποσοστό με το οποίο αντιπροσωπεύονται οι γυναίκες μεταξύ των διδασκόντων στα Ελληνικά Πανεπιστήμια. Ένα τέτοιο άρθρο θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για συζήτηση σχετικά με τις αιτίες και τις παραμέτρους αυτού του προβλήματος. Μερικά ερωτήματα τα οποία θα μπορούσαν να αντιμετωπιστούν σε μια τέτοια συζήτηση είναι τα εξής:

Συσχετίζεται ή όχι το ποσοστό των γυναικών μεταξύ των αποφοίτων των Πανεπιστημίων με το ποσοστό των γυναικών μεταξύ των διδασκόντων των Πανεπιστημίων;

Ποιοι λόγοι μπορεί να εμποδίζουν τις γυναίκες να ακολουθήσουν ακαδημαϊκή καριέρα;

Πώς βιώνουν την ακαδημαϊκή καριέρα οι γυναίκες που την έχουν επιλέξει; Τι δυσκολίες αντιμετωπίζουν;

Στη μελέτη κάποιων από αυτά τα ερωτήματα (πχ στο πρώτο και ίσως λιγότερο στο δεύτερο) η στατιστική θα μπορούσε να αξιοποιηθεί. Σε κάποια άλλα (όπως στο τρίτο) ίσως να είναι χρήσιμη μια ποιοτική προσέγγιση, με συνεντεύξεις γυναικών, συνδέσεις με άλλα κείμενα και προσεγγίσεις κλπ.

Άσκηση 4

Στη Μυτιλήνη, ο δήμος εγκατέστησε ένα καινοτόμο πρόγραμμα ηλεκτρονικών υπηρεσιών του δήμου από το οποίο εξυπηρετούνται οι κάτοικοι του νησιού, ιδιοκτήτες και ενοικιαστές σπιτιών. Η ικανοποίηση των κατοίκων του νησιού από τις ηλεκτρονικές υπηρεσίες του δήμου φαίνονται από τα παρακάτω ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων (α) και (β).

α) Ποιο από τα δύο ομαδοποιημένα ραβδογράμματα σχετικών συχνοτήτων αντιστοιχεί στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος; Τι δείχνει το άλλο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων;

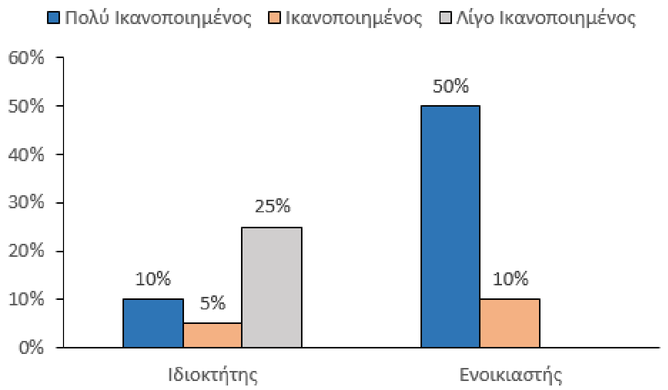
β) Ποιο ποσοστό του δείγματος είναι ιδιοκτήτες και ποιο ενοικιαστές σπιτιών;

γ) Ποιο ποσοστό του δείγματος είναι πολύ ικανοποιημένοι από τις ηλεκτρονικές υπηρεσίες του δήμου;

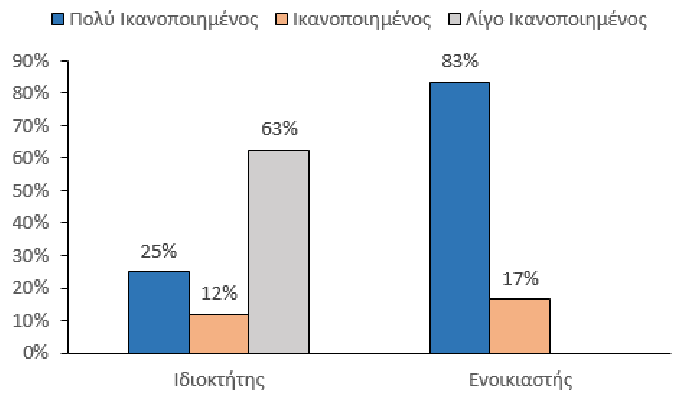
δ) Τι εκφράζουν τα ποσοστά 63% και 83% στο σχήμα (β);

ε) Αν το μέγεθος του δείγματος είναι 200 κάτοικοι, να βρείτε πόσοι είναι οι πολύ ικανοποιημένοι ιδιοκτήτες και πόσοι οι ικανοποιημένοι ενοικιαστές σπιτιών στο νησί.

Σχήμα (α)



Σχήμα (β)



<u>Λύση</u>

α) Στο σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος αντιστοιχεί το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του σχήματος (α) όπου το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων για τους ιδιοκτήτες και τους ενοικιαστές είναι 100% (10%+5%+25%+50%+10%=100%). Σο σχήμα (β) το ραβδόγραμμα δείχνει το ποσοστό ικανοποίησης σε κάθε μία από τις δύο κατηγορίες (25%+12%+63%=100% για τους ιδιοκτήτες, 83%+17%=100% για τους ενοικιαστές).

β) Όπως προκύπτει από το σχήμα (α), ιδιοκτήτες είναι το 40% του δείγματος (10+5+25) ενώ ενοικιαστές είναι το 60% του δείγματος (50+10).

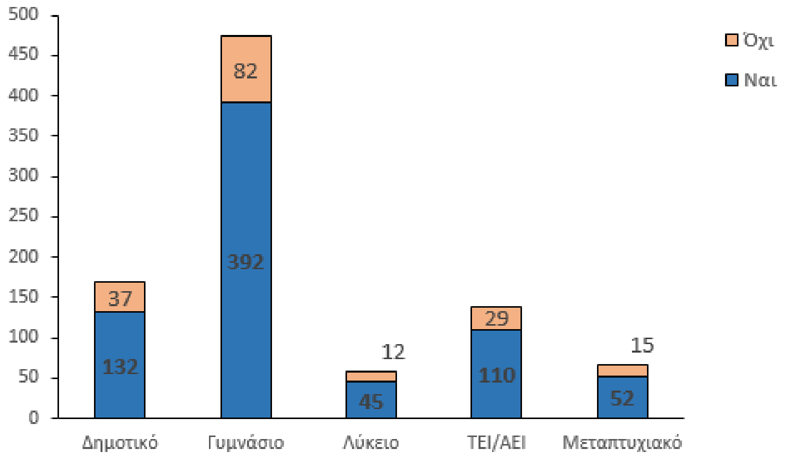
γ) Όπως προκύπτει από το σχήμα (α), πολύ ικανοποιημένοι είναι το 10%+50%=60% του δείγματος

δ) Στο (β), το 63% δείχνει το ποσοστό των λίγο ικανοποιημένων ιδιοκτητών στο σύνολο των ιδιοκτητών και το 83% δείχνει το ποσοστό των πολύ ικανοποιημένων ενοικιαστών στο σύνολο των ενοικιαστών.

ε) Αν το δείγμα είναι 200 κάτοικοι, οι πολύ ικανοποιημένοι ιδιοκτήτες είναι $10\% \cdot 200 = 20$ άτομα και οι ικανοποιημένοι ενοικιαστές είναι $10\% \cdot 200 = 20$ άτομα.

Άσκηση 5

Πρόσφατα πραγματοποιήθηκε μια έρευνα προκειμένου να ερευνηθεί εάν υπάρχει σχέση μεταξύ της πίστης του ανθρώπου στα θαύματα και του επιπέδου εκπαίδευσης που έχει αποκτήσει. Τα αποτελέσματα της έρευνας συνοψίζονται στο επόμενο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.



α) Τι ποσοστό αποφοίτων Γυμνασίου, Λυκείου και ΑΕΙ/ΤΕΙ έχουμε στο δείγμα μας;

β) Τι ποσοστό αποφοίτων Λυκείου φαίνεται να πιστεύουν στα θαύματα και τι ποσοστό αποφοίτων ΤΕΙ/ΑΕΙ φαίνεται ότι δεν πιστεύουν στα θαύματα;

γ) Να μετατρέψετε το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων σε ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ως προς την πίστη στα θαύματα.

δ) Με βάση τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας φαίνεται να υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ του επιπέδου εκπαίδευσης και της πίστης στα θαύματα;

<u>Λύση</u>

Για την οργάνωση των δεδομένων μας θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα συνάφειας:

		Πίστη στα θαύματα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δημοτικό	132	37	169
	Γυμνάσιο	392	82	474
	Λύκειο	45	12	57
	ΤΕΙ/ΑΕΙ	110	29	139
	Μεταπτυχιακό	52	15	67
	Σύνολο	731	175	906

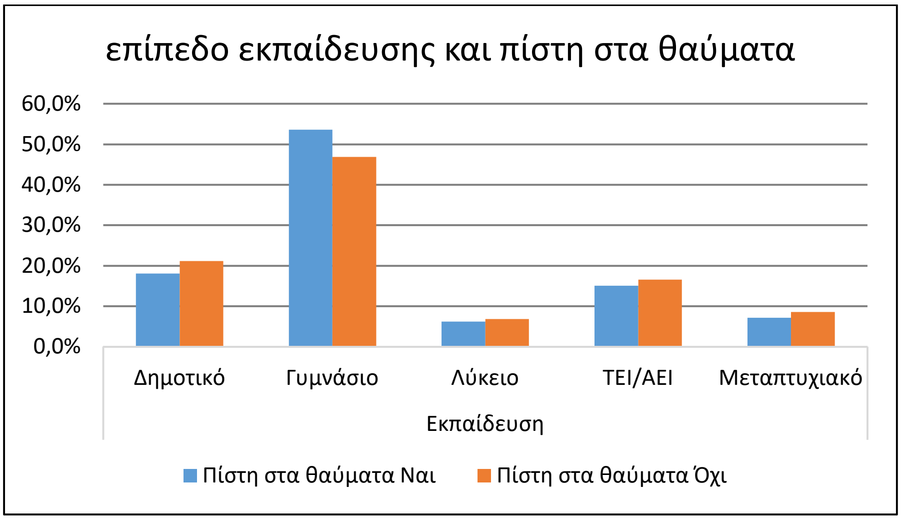
α) Οι απόφοιτοι Γυμνασίου είναι $\frac{474}{906} \simeq 0,523 = 52,3\%$ του δείγματος, οι απόφοιτοι Λυκείου είναι $\frac{57}{906} \simeq 0,063 = 6,3\%$ του δείγματος, και οι απόφοιτοι ΑΕΙ/ΤΕΙ είναι $\frac{139}{906} \simeq 0,153 = 15,3\%$ του δείγματος.

β) Το ποσοστό αποφοίτων Λυκείου που φαίνεται να πιστεύουν στα θαύματα είναι $\frac{45}{57} \simeq 0,789 = 78,9\%$. Το ποσοστό αποφοίτων ΤΕΙ/ΑΕΙ που φαίνεται ότι δεν πιστεύουν στα θαύματα είναι $\frac{29}{139} \simeq 0,209 = 20,9\%$.

γ) Ο πίνακας συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς την πίστη στα θαύματα είναι ο εξής:

		Πίστη στα θαύματα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δημοτικό	18,1%	21,1%	
	Γυμνάσιο	53,6%	46,9%	
	Λύκειο	6,2%	6,9%	
	ΤΕΙ/ΑΕΙ	15,0%	16,6%	
	Μεταπτυχιακό	7,1%	8,6%	
	Σύνολο	100,0%	100,0%	

Το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ως προς την πίστη στα θαύματα φαίνεται παρακάτω:



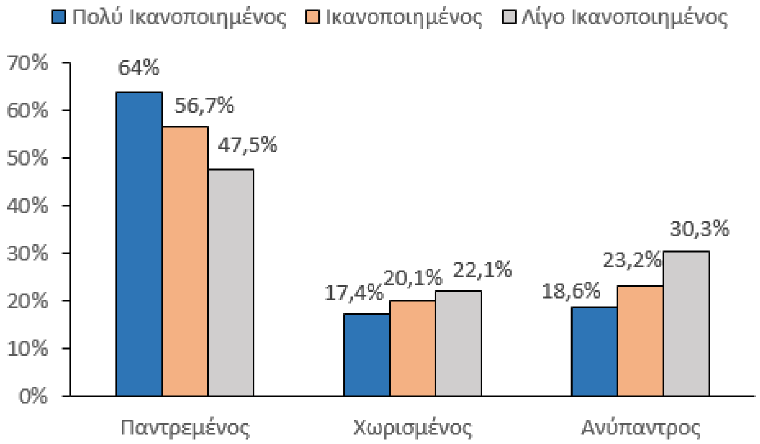
δ) Από το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα του (ε) ερωτήματος φαίνεται μια μεγαλύτερη συμμετοχή στο "όχι" από ότι στο "ναι" για τα τρία υψηλότερα επίπεδα εκπαίδευσης, αλλά και για το Δημοτικό. Αντίστροφη είναι η εικόνα για τους απόφοιτους Γυμνασίου. Αν κατασκευάσουμε τον πίνακα συνάφειας ως προς το επίπεδο εκπαίδευσης, αυτό φαίνεται από τα μεγαλύτερα ποσοστά του "όχι" που συγκεντρώνουν οι τρεις υψηλότερες βαθμίδες (21,1%, 20,9% και 22,4%) σε σύγκριση με το ποσοστό του "όχι" που αφορά το σύνολο των συμμετεχόντων (19,3%).

		Πίστη στα θαύματα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Εκπαίδευση	Δημοτικό	78,1%	21,9%	100,0%
	Γυμνάσιο	82,7%	17,3%	100,0%
	Λύκειο	78,9%	21,1%	100,0%
	ΤΕΙ/ΑΕΙ	79,1%	20,9%	100,0%
	Μεταπτυχιακό	77,6%	22,4%	100,0%
	Σύνολο	80,7%	19,3%	100,0%

Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για το Δημοτικό (21,9%), ενώ η αντίστροφη παρατήρηση ισχύει για το Γυμνάσιο (17,3%).
Ωστόσο, αν κανείς παραμέριζε τις λεπτομέρειες, θα μπορούσε να πει ότι περίπου 4 στους 5 συμμετέχοντες πιστεύουν στα θαύματα ανεξάρτητα από το επίπεδο εκπαίδευσης. Οι μικροδιαφορές που υπάρχουν ανά επίπεδο εκπαίδευσης δεν αλλάζουν την γενική εικόνα.

Άσκηση 6

Μια κυριακάτικη εφημερίδα περιέχει ένα άρθρο σχετικά με την ικανοποίηση των ανθρώπων από την εργασία τους και την οικογενειακή τους κατάσταση μαζί με το παρακάτω γράφημα. Οι συντάκτες του άρθρου καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι ο γάμος κάνει τους ανθρώπους περισσότερο ικανοποιημένους με την εργασία τους, δεδομένου ότι το 64% των πολύ ικανοποιημένων ανθρώπων είναι παντρεμένοι, ενώ μόνο το 18,6% δεν έχουν παντρευτεί ποτέ.



α) Συμφωνείτε με το συμπέρασμα του συντάκτη του άρθρου;
β) Συμφωνείτε με την αιτιολόγηση του συντάκτη του άρθρου;

<u>Λύση</u>

α) Από τα δεδομένα που παρουσιάζονται εδώ φαίνεται κάποια συσχέτιση μεταξύ οικογενειακής κατάστασης και ικανοποίησης από την εργασία. Ωστόσο, το συμπέρασμα ότι ο γάμος κάνει τους ανθρώπους περισσότερο ικανοποιημένους με την εργασία τους εμπεριέχει ή υπονοεί μια αιτιώδη σχέση: ο γάμος είναι η αιτία της ικανοποίησης από την εργασία ή κατά κάποιο τρόπο την προκαλεί. Προφανώς αυτό δεν ισχύει, διότι μια σχέση ανάμεσα στα δύο δεν είναι κατ' ανάγκην αιτιώδης. Θα μπορούσε να συμβαίνει το αντίστροφο: η ικανοποίηση από την εργασία να προκαλεί τον γάμο. Ή τίποτα από τα δύο δεν προκαλεί το άλλο: θα μπορούσαν και τα δύο να συνδέονται αιτιωδώς με κάτι άλλο, πχ. το πόσο καλά αμειβόμενη είναι η εργασία.
β) Στην αιτιολόγησή του ο συντάκτης συγκρίνει το 64% των πολύ ικανοποιημένων που είναι οι παντρεμένοι με το 18,6% των πολύ ικανοποιημένων που είναι οι ανύπαντροι. Αυτή η σύγκριση όμως δεν είναι ασφαλής, εφόσον φαίνεται ότι το πλήθος των παντρεμένων στο δείγμα είναι σαφώς μεγαλύτερο από το πλήθος των άλλων κατηγοριών.

Από τα δεδομένα φαίνεται να υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στην ικανοποίηση από την εργασία και την οικογενειακή κατάσταση των συμμετεχόντων στην έρευνα. Πιο συγκεκριμένα, μεταξύ των παντρεμένων φαίνεται να αυξάνεται το ποσοστό όταν από τους λίγο ικανοποιημένους από την εργασία περνάμε στους πολύ ικανοποιημένους (από το 47,5% στο 56,7% και μετά στο 64%). Το αντίθετο συμβαίνει μεταξύ των ανύπαντρων (από το 30,3% στο 23,2% και μετά στο 18,6%). Ας σημειώσουμε ότι, αν η ικανοποίηση από την εργασία δεν συσχετιζόταν με την οικογενειακή κατάσταση, θα περιμέναμε τα ποσοστά των τριών βαθμίδων ικανοποίησης να είναι περίπου ίδια στους παντρεμένους (δηλαδή, οι ράβδοι στην ομάδα παντρεμένοι να έχουν περίπου ίδιο ύψος). Και αντίστοιχα για τις δύο άλλες ομάδες (αν και τα ύψη των ράβδων στους ανύπαντρους αναμένεται να είναι χαμηλότερα από των παντρεμένων, εφόσον στο σύνολο του δείγματος οι ανύπαντροι είναι λιγότεροι από τους παντρεμένους)

Πρόσθετο Υλικό – θέματα για διερεύνηση

1) Το φθινόπωρο του 1973 παρατηρήθηκε το ακόλουθο παράδοξο κατά την εισαγωγή μεταπτυχιακών φοιτητών στο Πανεπιστήμιο του Berkeley στην Καλιφόρνια. Τα στοιχεία της έρευνας έδειξαν ότι οι άνδρες που υπέβαλλαν αίτηση ήταν πιο πιθανό από ό, τι οι γυναίκες να γίνουν δεκτοί. Στον πίνακα (α) δίνονται τα στοιχεία αιτούντων και εισακτέων ανδρών και γυναικών για μεταπτυχιακές σπουδές τη χρονιά του 1973. Στον πίνακα (β) δίνονται τα στοιχεία αιτούντων και εισακτέων ανδρών και γυναικών σε έξι διακεκριμένα τμήματα του Πανεπιστημίου του Berkeley για μεταπτυχιακές σπουδές τη χρονιά του 1973.

	Αιτούντες	**Εισακτέοι**	**Ποσοστό εισακτέων**
Άνδρες	8442	3714	……
Γυναίκες	4321	1512	……

Πίνακας (α): Πίνακας αιτούντων και εισακτέων ανδρών και γυναικών για μεταπτυχιακές σπουδές στο Πανεπιστήμιο του Berkeley

	Άνδρες			**Γυναίκες**		
	Αιτούντες	**Εισακτέοι**	**Ποσοστό εισακτέων**	**Αιτούντες**	**Εισακτέοι**	**Ποσοστό εισακτέων**
Τμήμα Α	825	512	……..	108	89	……..
Τμήμα Β	560	353	……..	25	17	……..
Τμήμα Γ	325	120	……..	593	202	……..
Τμήμα Δ	417	138	……..	375	131	……..
Τμήμα Ε	191	54	……..	393	94	……..
Τμήμα Ζ	373	23	……..	341	24	……..

Πίνακας (β): Πίνακας αιτούντων και εισακτέων ανδρών και γυναικών για μεταπτυχιακές σπουδές σε έξι διακεκριμένα τμήματα Πανεπιστήμιο του Berkley

α) Συμπληρώστε τα ποσοστά των εισακτέων του πίνακα (α). Τι διαπιστώνετε, συγκρίνοντας τα ποσοστά των ανδρών και των γυναικών εισακτέων;
β) Συμπληρώστε τα ποσοστά των εισακτέων του πίνακα (β) και συγκρίνετε:
(ι) τα ποσοστά των ανδρών εισακτέων στα τμήματα Γ και Ε με τα αντίστοιχα ποσοστά των γυναικών,
(ιι) τα ποσοστά των εισακτέων γυναικών στα τμήματα Α, Β, Δ και Ζ με τα αντίστοιχα ποσοστά των ανδρών.
γ) Τι διαπιστώνετε, συγκρίνοντας τα παραπάνω ποσοστά σε κάθε τμήμα του Πανεπιστήμιου με τα ποσοστά του ερωτήματος α; Υπάρχει κάποια σύγχυση;
δ) Σε τι είδους τμήματα ως προς την ανταγωνιστικότητα και το ποσοστό των εισακτέων φαίνεται να απευθύνονται οι γυναίκες και σε τι είδους τμήματα οι άνδρες;

Λύση
α) Ο πίνακας (α) συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω:

	Αιτούντες	**Εισακτέοι**	**Ποσοστό εισακτέων**
Άνδρες	8442	3714	44%
Γυναίκες	4321	1512	35%

Από τον πίνακα αυτό φαίνεται ότι πράγματι, οι άνδρες που υπέβαλλαν αίτηση ήταν πιο πιθανό από ό, τι οι γυναίκες να γίνουν δεκτοί.
β) Ο πίνακας (β) συμπληρωμένος φαίνεται παρακάτω:

	Άνδρες			**Γυναίκες**		
	Αιτούντες	**Εισακτέοι**	**Ποσοστό εισακτέων**	**Αιτούντες**	**Εισακτέοι**	**Ποσοστό εισακτέων**
Τμήμα Α	825	512	62%	108	89	82%
Τμήμα Β	560	353	63%	25	17	68%
Τμήμα Γ	325	120	37%	593	202	34%
Τμήμα Δ	417	138	33%	375	131	35%
Τμήμα Ε	191	54	28%	393	94	24%
Τμήμα Ζ	373	23	6%	341	24	7%

(ι) τα ποσοστά των ανδρών εισακτέων στα τμήματα Γ και Ε είναι υψηλότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των γυναικών, κατά 3 και 4 ποσοστιαίες μονάδες αντιστοίχως.
(ιι) τα ποσοστά των εισακτέων γυναικών στα τμήματα Α, Β, Δ και Ζ είναι υψηλότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των ανδρών κατά 20, 5, 2 και 1 ποσοστιαίες μονάδες αντιστοίχως.
γ) Στο σύνολο των 6 τμημάτων το ποσοστό των εισακτέων γυναικών είναι μικρότερο από εκείνο των ανδρών, παρά το ότι το ποσοστό των εισακτέων γυναικών είναι μεγαλύτερο από εκείνο των ανδρών σε 4 από τα 6 τμήματα. Αυτό οφείλεται στο ότι οι αριθμοί των γυναικών αιτουσών και εισακτέων για τα τμήματα Γ και Ε είναι από τους μεγαλύτερους αριθμούς που διαμορφώνουν το σύνολο των αιτουσών και των εισακτέων γυναικών.

Δηλαδή τα τμήματα Γ και Ε "βαραίνουν" στον υπολογισμό του ποσοστού περισσότερο από τα άλλα.

δ) Οι άνδρες φαίνεται να απευθύνονται σε όλα τα τμήματα, αλλά έχουν σχεδόν "αποκλειστικότητα" στο τμήμα Β. Ο γυναίκες απευθύνονται κυρίως στα Γ και Ε (όπου είναι περισσότερες από τους άνδρες υποψηφίους), λιγότερο στα Δ και Ζ και πολύ λίγο στα Α και Β.

Όσον αφορά το ποσοστό εισακτέων, τόσο οι άνδρες, όσο και οι γυναίκες έχουν υψηλά ποσοστά εισακτέων στα τμήματα Α και Β (αν και είναι μικρός ο αριθμός γυναικών εισακτέων στο Β) και πολύ χαμηλά στο Ζ. Γενικά, στα ποσοστά εισακτέων ανδρών και γυναικών ανά τμήμα δεν φαίνεται διαφορά τέτοια, ώστε να μιλήσει κανείς για σημαντικά διαφορετικές ευκαιρίες μεταξύ ανδρών και γυναικών.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.6 : ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΕΝΟΣ ΠΟΙΟΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

1) Στους επόμενους πίνακες δίνονται οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών δύο τμημάτων της Β΄ τάξης ενός γενικού λυκείου σε μια γραπτή αξιολόγηση της Άλγεβρας:

Τμήμα B_1			
20	17	14	10
20	17	13	9
19	16	12	9
19	16	11	8
17	15	10	8

Τμήμα B_2			
20	19	14	11
20	19	14	10
20	18	14	9
20	15	13	9
19	15	12	8

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών/τριών σε κάθε τμήμα. Ποια πρώτη εικόνα σας δίνουν τα αποτελέσματα των παραπάνω στατιστικών μέτρων για την επίδοση κάθε τμήματος;

β) Να βρείτε τους συντελεστές μεταβλητότητας (CV) και να συγκρίνετε τα δύο τμήματα ως προς την ομοιογένειά τους.

γ) Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές/μαθήτριες κάθε τμήματος που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 75% των μαθητών/τριών του τμήματος και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές/μαθήτριες που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 25% των μαθητών/τριών του τμήματος. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.

δ) Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για κάθε τμήμα.

<u>Λύση</u>

α) Για το B_1 είναι:

$$\overline{x}_1 = \frac{20+17+14+10+20+17+13+9+19+16+12+9+19+16+12+8+17+15+10+8}{20}$$

$$\overline{x}_1 = \frac{280}{20} = 14$$

$$s_1^{\,2} = \frac{(20-14)^2+(17-14)^2+\ldots+(8-14)^2}{20} = 16,3$$ ή αλλιώς:

$$s_1^{\,2} = \frac{2\cdot(20-14)^2+2\cdot(19-14)^2+3\cdot(17-14)^2+\ldots+2\cdot(8-14)^2}{20} = 16,3$$

και τελικά $s_1 = \sqrt{s_1^{\,2}} \simeq 4{,}04$

Ομοίως βρίσκουμε για το B_2: $\bar{x}_2 = 14{,}95$ και $s_2 \simeq 4{,}09$

Από τα παραπάνω, το B_2 φαίνεται να έχει ελαφρώς υψηλότερη μέση επίδοση, χωρίς όμως τα δύο τμήματα να έχουν σημαντική διαφορά στη διασπορά των βαθμολογιών τους.

β) Για το B_1 βρίσκουμε ότι $CV_1 = \frac{4{,}04}{14} \simeq 28{,}8\%$ και

για το B_2 βρίσκουμε ότι $CV_2 = \frac{4{,}09}{14{,}95} \simeq 27{,}4\%$.

Φαίνεται ότι το B_2 έχει λίγο περισσότερο ομοιογενές, κάτι που οφείλεται στη μεγαλύτερη μέση τιμή του.

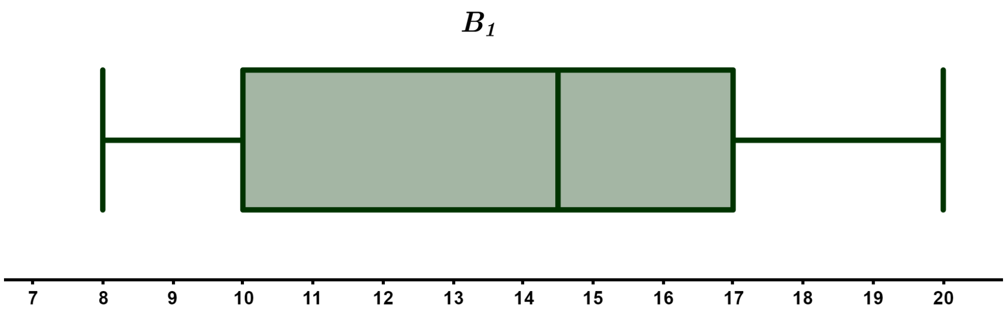
γ) Βρίσκουμε τα τεταρτημόρια για κάθε τμήμα:

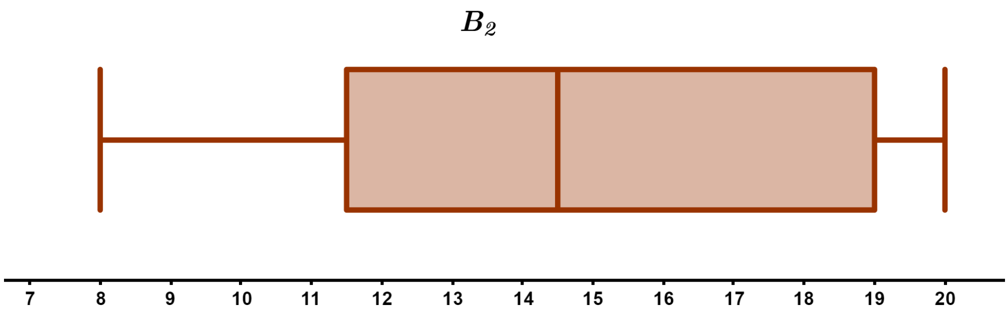
για το B_1 έχουμε: Q_1=10, Q_2=δ=14,5, Q_3=17, ενώ

για το B_2 έχουμε: Q_1=11,5, Q_2=δ=14,5, Q_3=19

Από αυτά προκύπτει ότι οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν θα είναι για το B_1 από 17 και πάνω, ενώ για το B_2 από 19 και πάνω. Οι βαθμοί των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία θα είναι για το B1 από 10 και κάτω, ενώ για το B2 από 11 και κάτω.

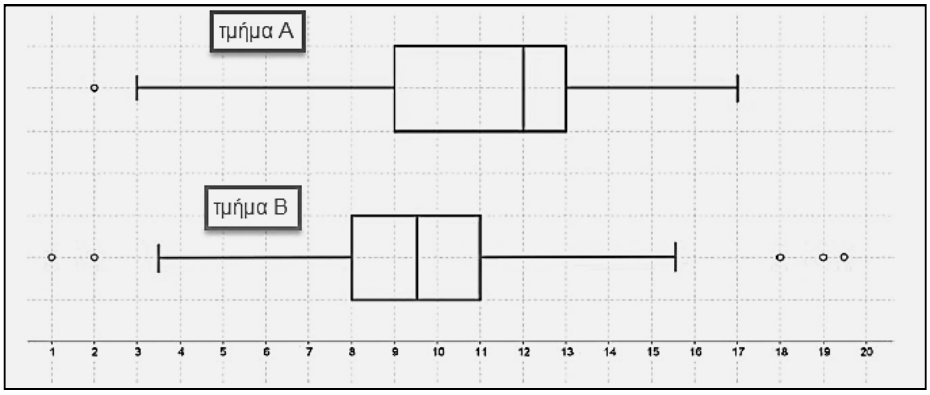
δ) Τα θηκογράμματα φαίνονται παρακάτω:





Άσκηση 2

Τα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζουν τους βαθμούς των μαθητών/τριών δύο τμημάτων Α και Β σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό.



α) Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο εύρος βαθμών.

β) Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών;

γ) Σε ποιο από τα δύο τμήματα φαίνεται να είναι πιο συμμετρική γύρω από τη διάμεσο η κατανομή των βαθμών;

δ) Να γράψετε μια μικρή αναφορά για το ποιο τμήμα θα μπορούσε να είναι το καλύτερο.

ε) Να βρείτε το τμήμα και τη βαθμολογία των δύο μαθητών/τριών με τον καλύτερο βαθμό.

Λύση

α) Το εύρος για το τμήμα Α είναι $R_A = 17 - 2 = 15$ και για το Β είναι $R_B = 19{,}5 - 1 = 18{,}5$. Οπότε το τμήμα Β έχει μεγαλύτερο εύρος βαθμών.

β) Για το Α έχουμε: $Q = Q_3 - Q_1 = 13 - 9 = 4$ και για το Β: $Q = Q_3 - Q_1 = 11 - 8 = 3$. Άρα, μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών έχει το τμήμα Α.

γ) Στο τμήμα Β η κατανομή των βαθμών φαίνεται να είναι πιο συμμετρική γύρω από τη διάμεσο.

δ) Το "καλύτερο" θα μπορούσε να αναζητηθεί με διαφορετικά κριτήρια.

Με κριτήριο την μέση επίδοση καλύτερο φαίνεται να είναι το Α. Με κριτήριο τη συμμετρική κατανομή των βαθμών μάλλον είναι το Β. Με κριτήριο τη μικρότερη διασπορά των βαθμών καλύτερο φαίνεται μάλλον το Α. Με κριτήριο τους υψηλότερους βαθμούς (πάνω από 17) καλύτερο είναι το Β.

Ποιο όμως από όλα αυτά τα κριτήρια θα μπορούσε να είναι επικρατέστερο; Μιλώντας για τη συμμετοχή σε μαθηματικό διαγωνισμό, το κριτήριο της υψηλότερης βαθμολογίας ίσως να είναι αυτό που θα κυριαρχήσει. Αλλά σχετικά με τη διδασκαλία και την πρόοδο των μαθητών ίσως να είναι προτιμότερη μια μεγαλύτερη ομοιογένεια του τμήματος.

Βέβαια, σε αυτή τη συζήτηση δεν λαμβάνουμε καθόλου υπόψη άλλα χαρακτηριστικά του τμήματος (πχ πολιτισμικό υπόβαθρο, φύλο των μαθητών, ιδιαίτερα ενδιαφέροντα, κλίσεις, δυσκολίες και ικανότητες των μαθητών κ.α.) που μπορεί να μετατοπίζουν τη συζήτηση από το "ποιο τμήμα είναι καλύτερο" στο "ποια είναι τα χαρακτηριστικά του κάθε τμήματος". Επιπλέον, ούτε οι επιδόσεις, ούτε τα χαρακτηριστικά είναι αναλλοίωτα στο χρόνο και στις διαφορετικές συνθήκες.

ε) Οι δύο υψηλότερες βαθμολογίες είναι 19 και 19,5 και τις πέτυχαν μαθητές/τριες από το τμήμα Β.

Άσκηση 3

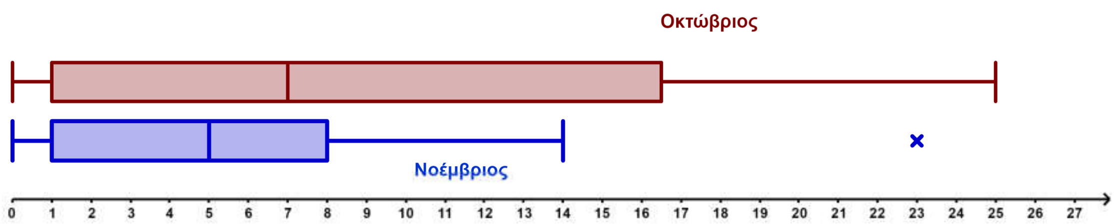
Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών που έκαναν οι μαθητές ενός τμήματος τους μήνες Οκτώβριο και Νοέμβριο:

	Απουσίες μαθητών ενός τμήματος																
Οκτώβριος	14	7	0	19	21	7	3	0	0	25	2	9	8	7	14	20	0
Νοέμβριος	7	8	2	2	1	23	14	7	0	14	4	7	5	0	1	8	0

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα των απουσιών των μαθητών του τμήματος για κάθε μήνα χωριστά και να συγκρίνετε τις απουσίες των μαθητών.

<u>Λύση</u>

Τα θηκογράμματα των απουσιών φαίνονται παρακάτω:



Από τα θηκογράμματα φαίνεται ότι τον Οκτώβριο έγιναν περισσότερες απουσίες.

Άσκηση 4

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα σε χιλιάδες ώρες δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Μπαταρία τύπου Α	Μπαταρία τύπου Β
20	**26**
26	**32**
24	**19**
22	**20**
18	**23**

α) Να βρείτε τη δειγματική μέση τιμή της διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

β) Με βάση το παραπάνω δείγμα και το γεγονός ότι μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ, ποιου τύπου μπαταρία θα προτιμήσετε αν μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει:

ι) 40 ευρώ **ιι)** 42 ευρώ

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε μία από τις περιπτώσεις ι) και ιι).

γ) Να βρείτε τις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις s_A και s_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

δ) Να βρείτε ποιο από τα δύο παραπάνω δείγματα μπαταριών τύπου Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής.

Λύση

α) Οι μέσες τιμές για τη διάρκεια ζωής στα δύο δείγματα είναι $\bar{x}_A=22$ χιλιάδες ώρες και $\bar{x}_B=24$ χιλιάδες ώρες.

β) Για την μπαταρία Α το κόστος ανά χίλιες ώρες λειτουργίας είναι $38:22\simeq 1,72$ ευρώ. Για την μπαταρία Β το κόστος ανά χίλιες ώρες λειτουργίας είναι για την περίπτωση (ι) $40:24\simeq 1,66$ ευρώ και για την περίπτωση (ιι) είναι $42:24=1,75$. Οπότε στην περίπτωση (ι) προτιμότερη είναι η μπαταρία Β, ενώ στην περίπτωση (ιι) προτιμότερη είναι η Α.

Τα παραπάνω βασίζονται στα δεδομένα των δύο δειγμάτων και στην υπόθεση ότι η μπαταρία που θα αγοράσουμε θα έχει τον ίδιο χρόνο ζωής που έχει το αντίστοιχο δείγμα. Αυτή η υπόθεση δεν είναι βέβαιο ότι θα επαληθευτεί.

γ) Είτε χρησιμοποιώντας τον τύπο για τη διακύμανση και βρίσκοντας την τετραγωνική ρίζα, είτε με αξιοποίηση κάποιου λογιστικού φύλλου, βρίσκουμε τις τυπικές αποκλίσεις των δύο δειγμάτων:

$s_A \simeq 2,8$ και $s_B \simeq 4,7$

δ) Έχουμε αντίστοιχα: $CV_A=\frac{2,8}{22}\simeq 12,7\%$ και $CV_B=\frac{4,7}{24}\simeq 19,6\%$. Οπότε μεγαλύτερη ομοιογένεια παρουσιάζει το δείγμα των μπαταριών τύπου Α.

Άσκηση 5

Στις 12μ.μ. η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λαμία και στη Θεσσαλονίκη το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου ήταν:

	Θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου									
Λαμία (Λ)	**20**	**18**	**20**	**17**	**18**	**17**	**16**	**17**	**16**	**10**
Θεσσαλονίκη (Θ)	**18**	**16**	**17**	**15**	**16**	**12**	**16**	**17**	**20**	**22**

α) Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των δειγμάτων της Λαμίας και της Θεσσαλονίκης.

β) Αν η δειγματική τυπική απόκλιση (σε βαθμούς Κελσίου) για τη Λαμία και τη Θεσσαλονίκη είναι $s_\Lambda=2,66$ και $s_\Theta=2,59$ αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τα δύο δείγματα οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στη Λαμία παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της Λαμίας, να βρείτε σε ποια πόλη από τις δύο το συγκεκριμένο δεκαήμερο οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

α) Οι δύο πόλεις έχουν την ίδια μέση θερμοκρασία: $\bar{x}_\Lambda = 16{,}9$ και $\bar{x}_\Theta = 16{,}9$. Για τις διαμέσους έχουμε $\delta_\Lambda = 17$ και $\delta_\Theta = 16{,}5$. Επικρατούσα θερμοκρασία για τη Λαμία είναι $M_0 = 17$ και για τη Θεσσαλονίκη είναι $M_0 = 16$.

β) Εφόσον $s_\Lambda > s_\Theta$, μεγαλύτερη διασπορά έχουν οι θερμοκρασίες του δείγματος της Λαμίας.

γ) Οι πραγματικές θερμοκρασίες στη Λαμία θα είναι 5 βαθμούς μικρότερες από εκείνες του πίνακα, άρα θα είναι ως εξής:

	Θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου									
Λαμία (Λ)	**15**	**13**	**15**	**12**	**13**	**12**	**11**	**12**	**11**	**5**
Θεσσαλονίκη (Θ)	**18**	**16**	**17**	**15**	**16**	**12**	**16**	**17**	**20**	**22**

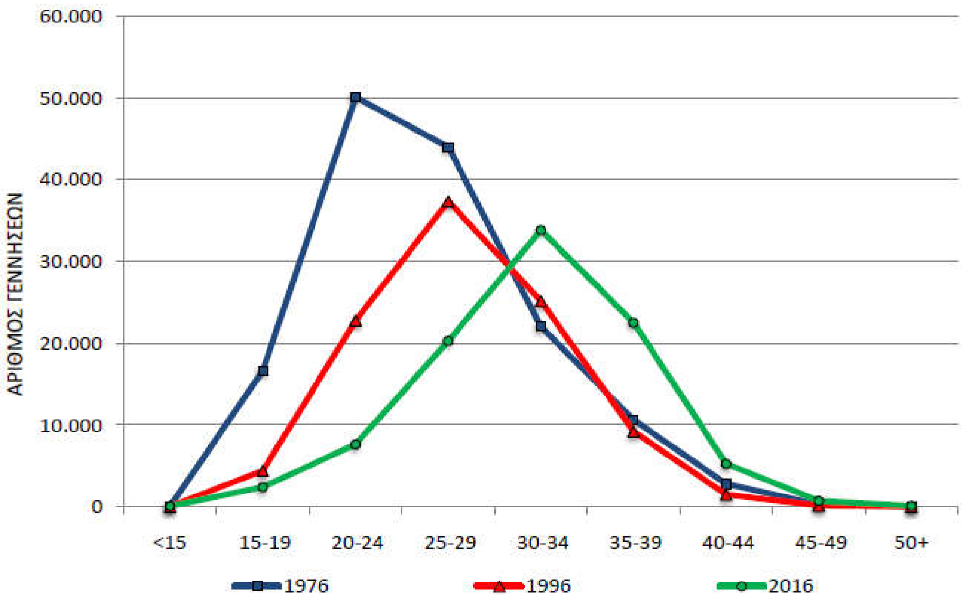
Η μέση τιμή θα είναι κατά 5 βαθμούς μικρότερη εκείνης που υπολογίστηκε, άρα $\bar{x}_\Lambda = 11{,}9$ ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει ίδια. Έτσι έχουμε:

$$CV_\Lambda = \frac{s_\Lambda}{|\bar{x}_\Lambda|} = \frac{2{,}66}{11{,}9} \simeq 22\% \text{ και } CV_\Theta = \frac{s_\Theta}{|\bar{x}_\Theta|} = \frac{2{,}59}{16{,}9} \simeq 15\%.$$

Οπότε, μεγαλύτερη ομοιογένεια έχουν οι θερμοκρασίες στη Θεσσαλονίκη.

Άσκηση 6

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται τα πολύγωνα συχνοτήτων των γεννήσεων ζώντων κατά ομάδες ηλικιών της μητέρας για τα έτη 1976, 1996 και 2016 (Πηγή: ΕΛ.ΣΤΑΤ: Διεύθυνση Στατιστικών Πληθυσμού & Αγοράς Εργασίας, Τμήμα Φυσικής & Μεταναστευτικής Κίνησης Πληθυσμού).



α) Σε ποια ηλικία των μητέρων έχουμε τις περισσότερες γεννήσεις το 1976, το 1996 και το 2016; Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;
β) Να σχολιάσετε τον αριθμό γεννήσεων κατά ηλικιακή ομάδα των μητέρων για το 2016.
γ) Σε ποιες ηλικιακές ομάδες των μητέρων φαίνεται ο αριθμός των γεννήσεων το 2016 να ξεπερνάει τους αντίστοιχους αριθμούς για τα έτη 1996 και 1976; Γιατί πιστεύετε ότι συνέβη αυτό;

<u>Λύση</u>
α) Τις περισσότερες γεννήσεις το 1976 έχουμε στις ηλικίες 20-24 των μητέρων, το 1996 στις ηλικίες 25-29 και το 2016 στις ηλικίες 30-34. Κάποιοι λόγοι για τους οποίους μπορεί να συμβαίνει αυτό συνδέονται με την αύξηση τη πρόσβασης των γυναικών στις σπουδές και την εργασία που μεταθέτει για αργότερα τις γεννήσεις των παιδιών. Θα μπορούσε να γίνει μια συζήτηση στην τάξη αφενός για άλλους λόγους που μπορεί να συμβαίνει αυτό και αφετέρου για την αξιολόγηση (ως θετικά ή αρνητικά, για ποιον και με τι κριτήριο) των γεγονότων αυτών (τόσο της αύξησης της ηλικίας των μητέρων κατά τη γέννηση του παιδιού τους, όσο και των λόγων που θεωρείται ότι αυτό συμβαίνει)
β) Η κορύφωση των γεννήσεων για το 2016 συμβαίνει στην ηλικία των 30-34. Το πολύγωνο συχνοτήτων φαίνεται κάπως συμμετρικό πριν και μετά την κορυφή του.
γ) Ο αριθμός των γεννήσεων για το 2016 ξεπερνάει τους αντίστοιχους αριθμούς για τα έτη 1996 και 1976 στις ηλικιακές ομάδες 30-34, 35-39, 40-44 και 45-49. Αυτό συνδέεται με το πρώτο ερώτημα, δηλαδή με τη "μετατόπιση" των γεννήσεων σε μεγαλύτερες ηλικίες των μητέρων. Έτσι, βλέπουμε οι λιγότερες γεννήσεις στις μικρότερες ηλικίες (για το 2016) να εξισορροπούνται με περισσότερες γεννήσεις στις μεγαλύτερες.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.7 : ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΠΟΣΟΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Λύσεις των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Να διατάξετε τις παρακάτω τιμές του r σε αύξουσα τάξη του βαθμού γραμμικής συσχέτισης δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y: $-0,6,\ \ 0,9, -0,7\ \ , 0,2,\ \ 0, -1$.

Λύση

Με κριτήριο το πόσο ισχυρή είναι η γραμμική συσχέτιση και ανεξάρτητα από το αν αυτή είναι θετική ή αρνητική, η διάταξη των τιμών του r σε αύξουσα σειρά είναι:

$0,\ \ 0,2,\ \ -0,6,\ \ -0,7,\ \ 0,9,\ \ -1$

Άσκηση 2

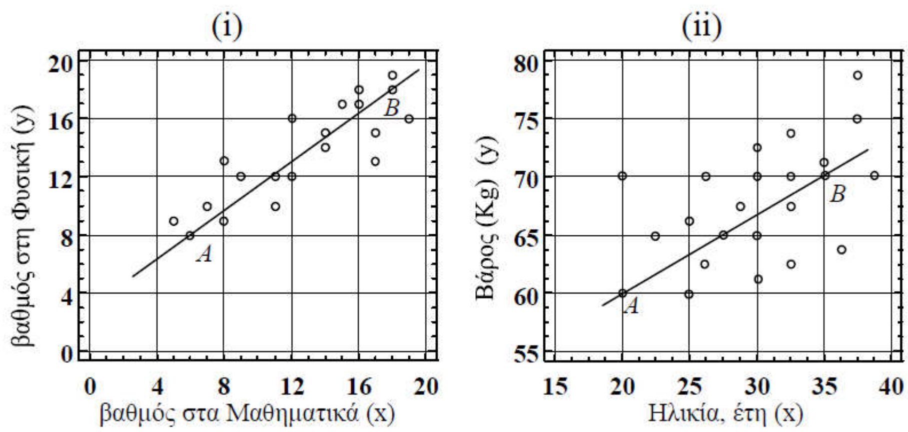
Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y είναι $0,96$, ενώ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών Ζ και Φ είναι $-0,96$. Ποια είναι η διαφορά τους;

Λύση

Τα δύο ζευγάρια μεταβλητών έχουν το ίδιο ισχυρή γραμμική συσχέτιση, αλλά για τις μεταβλητές X και Y η συσχέτιση είναι θετική, ενώ για τις Ζ και Φ είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι όταν οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, οι τιμές της Y τείνουν να αυξάνονται, ενώ όταν οι τιμές της μεταβλητής Ζ αυξάνονται, οι τιμές της Φ τείνουν να μειώνονται.

Άσκηση 3

Δίνονται δυο διαγράμματα διασποράς με χαραγμένες «με το μάτι» δύο ευθείες από έναν μαθητή.



α) Χρησιμοποιώντας τα σημεία Α και Β να βρείτε τις εξισώσεις των δύο ευθειών.

β) Πώς θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τις ευθείες του ερωτήματος α);

Λύση

α) Για την περίπτωση (i) έχουμε Α(6,8), Β(18,18) και αναζητούμε την ευθεία $y = \alpha + \beta x$ η οποία διέρχεται από τα Α και Β. Οπότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 8 = \alpha + \beta \cdot 6 \\ 18 = \alpha + \beta \cdot 18 \end{cases}$$

από τη λύση του οποίου προκύπτει ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 0,83$. Οπότε η ευθεία είναι η $y = 3 + 0,83x$

Ομοίως για την περίπτωση (ii) βρίσκουμε την ευθεία $y = 46,66 + 0,66x$.

β) Οι ευθείες του ερωτήματος (α) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του βαθμού στη Φυσική αν ξέρουμε το βαθμό στα Μαθηματικά (για την περ i) και για την εκτίμηση του βάρους αν ξέρουμε το ύψος (για την περ. ii). Αυτές οι εκτιμήσεις μπορούν να γίνουν με κάποιους περιορισμούς. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το βάρος για ηλικία 15 ετών ή για ηλικία 60 ετών, γιατί οι τιμές αυτές βρίσκονται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε.

Άσκηση 4

Μια εταιρεία διαφημίσεων παρουσίασε τον επόμενο πίνακα:

Αριθμός διαφημίσεων	**Έσοδα από πωλήσεις**
10	**20000**
18	**28000**
24	**35000**
32	**44000**
35	**48000**
37	**50000**
42	**55000**

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να εκτιμήσετε από αυτό τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ του αριθμού διαφημίσεων της εταιρείας και των εσόδων της από τις πωλήσεις.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ του αριθμού διαφημίσεων της εταιρείας και των εσόδων της από τις πωλήσεις.

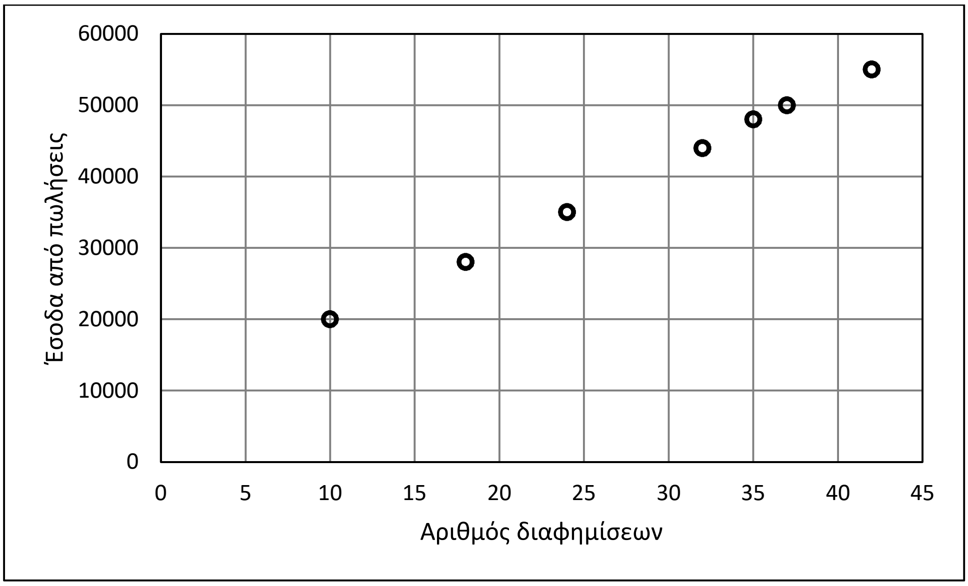
γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

δ) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 30, πόσο εκτιμάτε ότι θα ήταν τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων;

ε) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 60, θα ήταν ασφαλές να εκτιμήσετε τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων, όπως στο δ);

Λύση

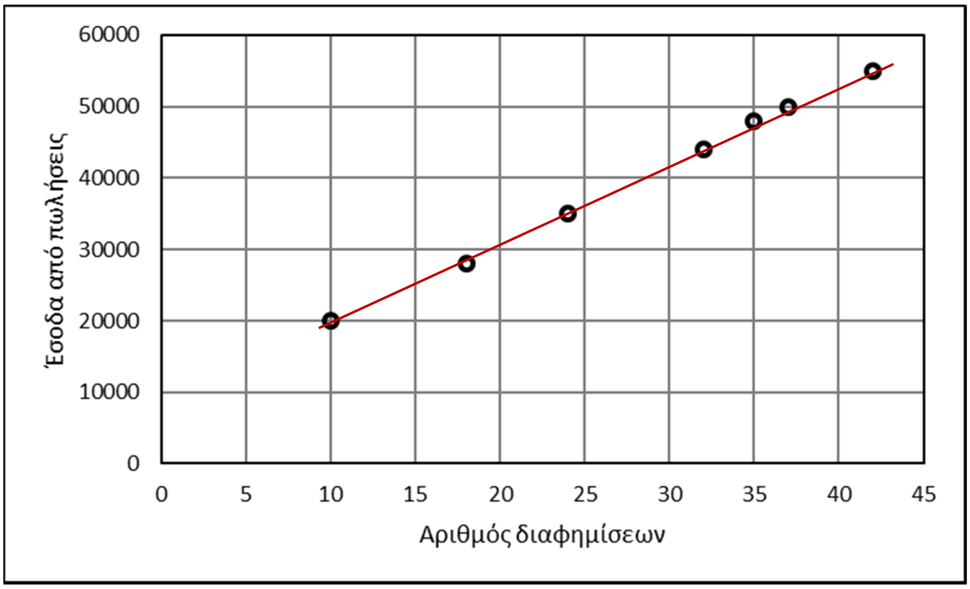
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται να υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ του αριθμού των διαφημίσεων και των εσόδων από πωλήσεις.

β) Χρησιμοποιώντας λογιστικό φύλλο ή κάποια εφαρμογή στατιστικής επεξεργασίας, ή ακόμη και τον τύπο για τον συντελεστή Pearson, βρίσκουμε $r = 0{,}9995$. Επειδή η τιμή του συντελεστή είναι πολύ κοντά στο 1, ο αριθμός των διαφημίσεων και τα έσοδα από πωλήσεις έχουν σχεδόν τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση.

γ) Επιλέγουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (10,20000) και (42,55000).



δ) Αν το πλήθος των διαφημίσεων που αγόραζε ένα κανάλι ήταν 30, τα έσοδα της εταιρείας διαφημίσεων εκτιμάμε ότι θα ήταν περίπου 42000.

ε) Για πλήθος διαφημίσεων 60, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε τα έσοδα, εφόσον το 60 βρίσκεται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας.

Άσκηση 5

Τα δεδομένα του επόμενου πίνακα παριστάνουν τους βαθμούς (στην κλίμακα του 100) 10 μαθητών/τριών της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου στα μαθήματα της Φυσικής (Χ) και των Μαθηματικών (Υ) κορμού σε μια γραπτή αξιολόγηση.

Βαθμός- Χ	**Βαθμός- Υ**	**Βαθμός- Χ**	**Βαθμός- Υ**
67	**63**	**81**	**85**
74	**67**	**93**	**89**
67	**70**	**81**	**89**
78	**74**	**96**	**96**
89	**81**	**89**	**100**

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς και να εκτιμήσετε από αυτό τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των βαθμών της Φυσικής (Χ) και των Μαθηματικών (Υ) των 10 μαθητών/τριών της Β τάξης του Γενικού Λυκείου.

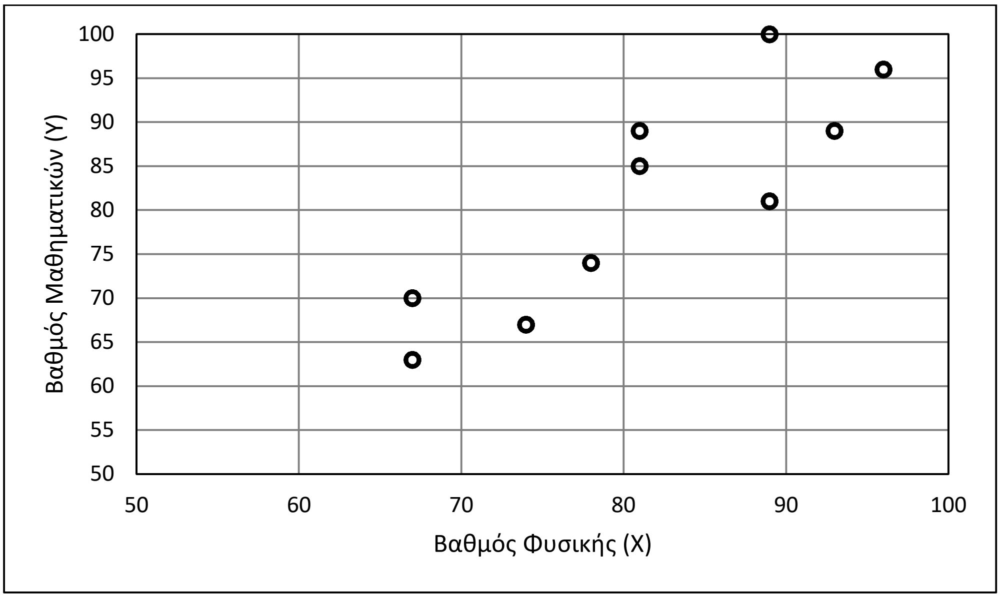
β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των βαθμών της Φυσικής (Χ) και των Μαθηματικών (Υ) των 10 μαθητών/τριών της Β΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.

γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

δ) Πώς θα μπορούσατε να εκτιμήσετε τον βαθμό των Μαθηματικών ενός μαθητή της Β΄ Λυκείου, εάν γνωρίζατε ότι στη Φυσική έγραψε 70;

<u>Λύση</u>

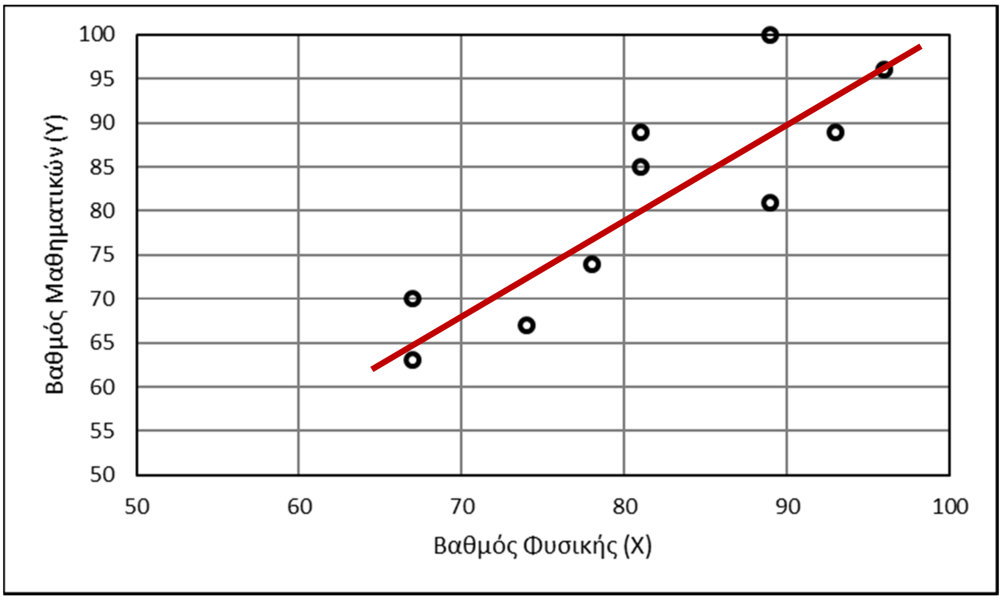
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



Από το διάγραμμα διασποράς φαίνεται ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των βαθμών των δύο μαθημάτων.

β) Υπολογίζουμε (πχ με χρήση λογιστικού φύλλου) ότι $r = 0,86$. Η τιμή αυτή του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης Pearson δείχνει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των βαθμών των δύο μαθημάτων.

γ) Επιλέγουμε την ευθεία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



δ) Για έναν μαθητή που έγραψε στη Φυσική 70, ένας αναμενόμενος βαθμός για το μάθημα των Μαθηματικών είναι περίπου 68.

Άσκηση 6

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ηλικίες και οι (συστολικές) πιέσεις αίματος 10 γυναικών.

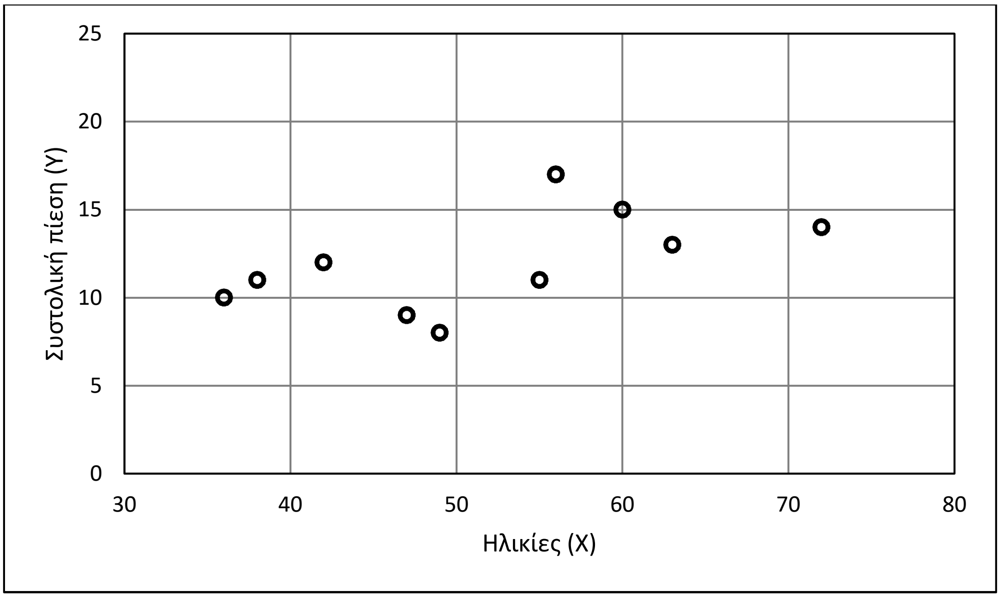
Ηλικία (x)	**56**	**42**	**72**	**36**	**63**	**47**	**55**	**49**	**38**	**60**
Πίεση αίματος (y)	**17**	**12**	**14**	**10**	**13**	**9**	**11**	**8**	**11**	**15**

α) Να σημειώσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία (x, y) σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, όπου x είναι η ηλικία των γυναικών σε έτη και y είναι η πίεση αίματος των γυναικών σε cm Hg.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών της ηλικίας των γυναικών σε έτη (x) και της πίεσης τους σε cm Hg (y).

<u>Λύση</u>

α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



β) Βρίσκουμε ότι r = 0,57 . Αυτή η τιμή δηλώνει ότι υπάρχει θετική γραμμική συσχέτιση, η οποία όμως δεν είναι ισχυρή.

Άσκηση 7

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται στην πρώτη γραμμή οι τιμές (σε €) για διαφορετικά κράνη ποδηλασίας και στη δεύτερη γραμμή η βαθμολογία ποιότητάς τους που έγινε από ειδικούς (σε μια κλίμακα από 0 έως 100, όπου όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή τόσο πιο ποιοτικό είναι το κράνος).

Τιμή (€)	**35**	**22**	**33**	**42**	**50**	**23**	**29**	**18**	**39**	**28**	**20**	**25**
Βαθμολογία ποιότητας	**64**	**60**	**58**	**55**	**54**	**45**	**47**	**43**	**42**	**41**	**40**	**32**

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

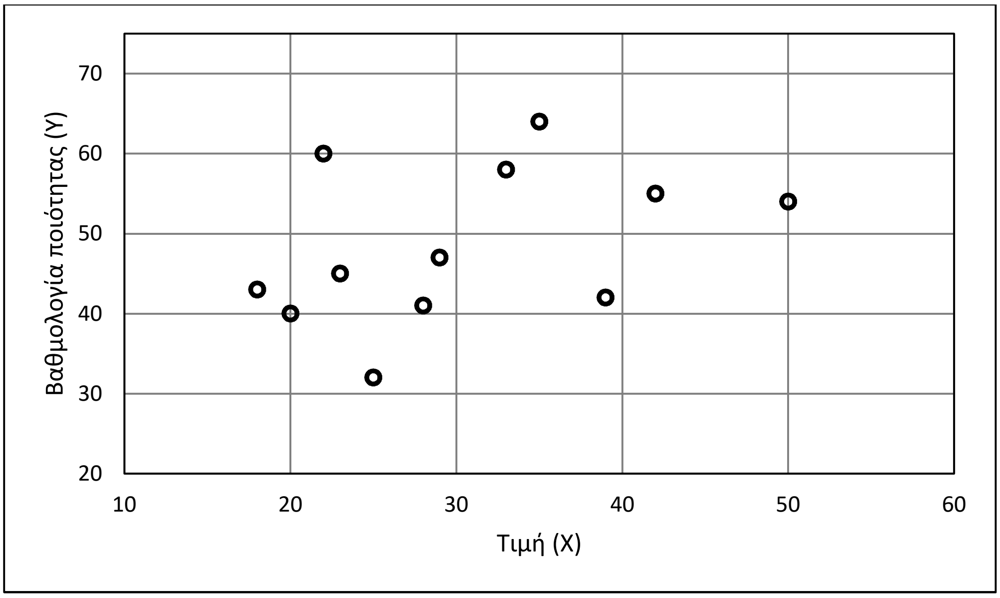
β) Υπάρχει γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην τιμή και τη βαθμολογία ποιότητας;

γ) Θα μπορούσαμε να πούμε με βεβαιότητα ότι αν αγοράσουμε πιο φθηνό κράνος θα έχει πιο χαμηλή ποιότητα;

δ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» στο διάγραμμα διασποράς μια ευθεία που θα μπορούσε να περιγράφει τη σχέση του αναμενόμενου βαθμού ποιότητας ενός ποδηλατικού κράνους με την τιμή του.

<u>Λύση</u>

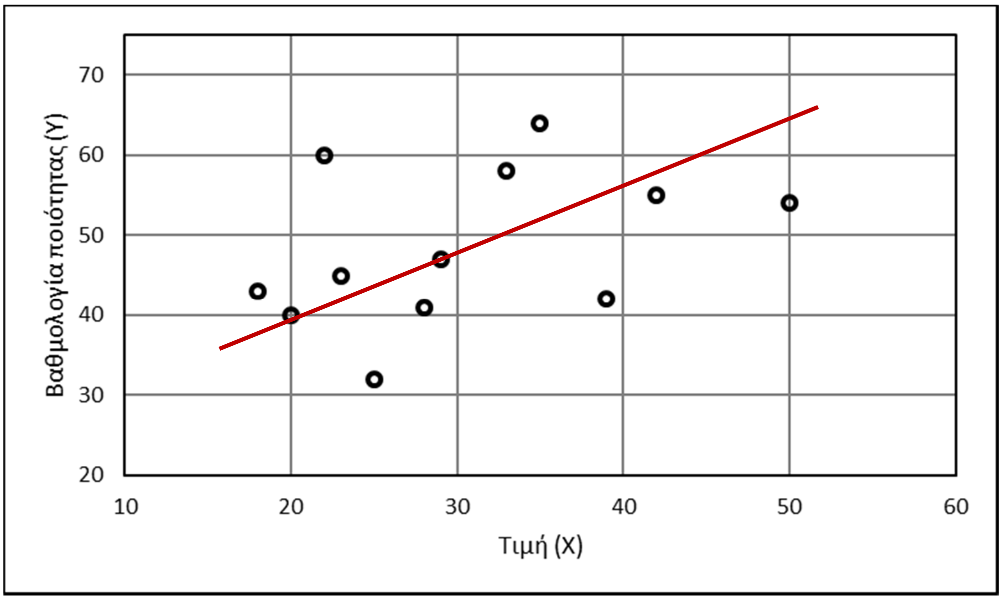
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



β) Από το διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει κάποια ασθενής γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στην τιμή και την βαθμολογία ποιότητας. Υπολογίζοντας τον συντελεστή Pearson βρίσκουμε $r = 0,40$, κάτι που επιβεβαιώνει την εκτίμηση για ασθενή γραμμική συσχέτιση.

γ) Επειδή η συσχέτιση είναι ασθενής, δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι χαμηλότερη τιμή σημαίνει χαμηλότερη ποιότητα. Για παράδειγμα υπάρχει κράνος με τιμή 39 € και βαθμολογία 42, και άλλο με τιμή 22 € και βαθμολογία 60.

δ) Μια ευθεία που θα μπορούσε να περιγράφει τη σχέση του αναμενόμενου βαθμού ποιότητας ενός ποδηλατικού κράνους με την τιμή του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση 8

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται οι συντελεστές γραμμικής συσχέτισης των γραπτών βαθμολογιών στις εξετάσεις Ιουνίου σε 5 μαθήματα ενός τμήματος Β΄ τάξης γενικού λυκείου.

	Άλγεβρα	Βιολογία	Γλώσσα	Φυσική	Χημεία
Άλγεβρα	**1,00**				
Βιολογία	**0,54**	**1,00**			
Γλώσσα	**0,76**	**0,81**	**1,00**		
Φυσική	**0,70**	**0,73**	**0,71**	**1,00**	
Χημεία	**0,41**	**0,80**	**0,67**	**0,66**	**1,00**

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει, ισχυρή ή όχι, γραμμική συσχέτιση ανάμεσα στις βαθμολογίες στα 5 εξεταζόμενα μαθήματα των μαθητών/τριών αυτών.

<u>Λύση</u>

Καταρχάς φαίνεται μια θετική γραμμική συσχέτιση ανάμεσα σε όλα τα μαθήματα, αν τα πάρουμε ανά δύο. Ισχυρή συσχέτιση υπάρχει μεταξύ Γλώσσας και Βιολογίας (0,81), Χημείας και Βιολογίας (0,80), Γλώσσας και Άλγεβρας (0,76).

Άσκηση 9

Το πλήθος x των οχημάτων σε εκατομμύρια και ο αριθμός y των ατυχημάτων σε εκατοντάδες, σε 15 διαφορετικές χώρες, δίνονται από τον επόμενο πίνακα:

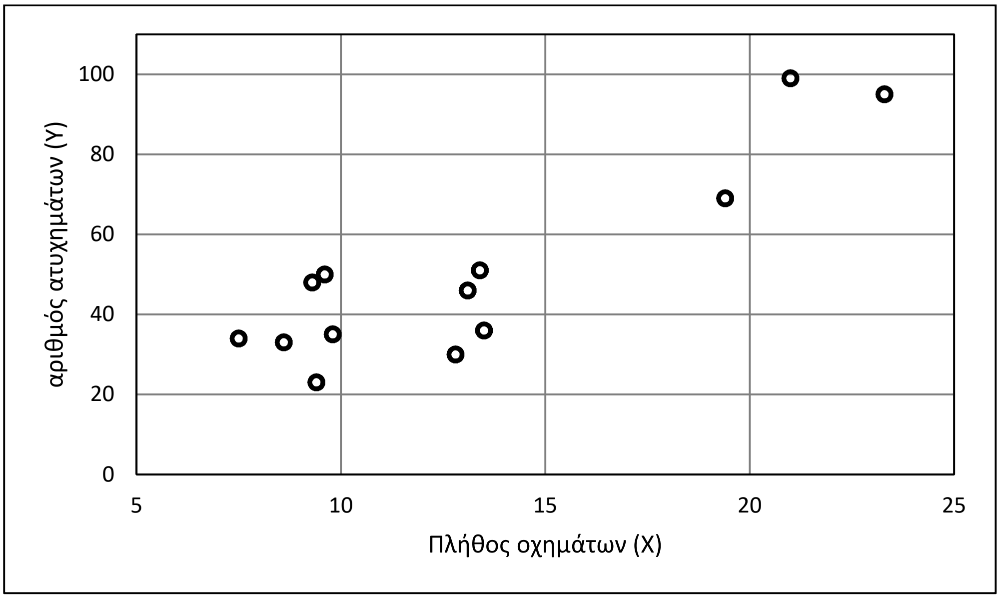
Χώρα	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο
x	8,6	13,4	12,8	9,3	1,3	9,4	13,1	4,9	13,5	9,6	7,5	9,8	23,3	21	19,4
y	33	51	30	48	12	23	46	18	36	50	34	35	95	99	69

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ των μεταβλητών του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού ατυχημάτων για τις 15 χώρες.

β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού ατυχημάτων για τις 15 χώρες.

<u>Λύση</u>

α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



β) Υπολογίζουμε ότι $r = 0,90$. Η τιμή αυτή δείχνει ότι υπάρχει ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ του πλήθους των οχημάτων και του αριθμού ατυχημάτων για τις 15 χώρες. Είναι ίσως αναμενόμενο μεγαλύτερος αριθμός αυτοκινήτων να συνδέεται με μεγαλύτερο αριθμό ατυχημάτων. Ωστόσο, έχει ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι παράγοντες που κάνουν τις δύο μεταβλητές να μην είναι πλήρως γραμμικά συσχετισμένες. Αυτό θα οδηγούσε σε επέκταση της έρευνας ώστε να συμπεριλάβει και άλλες διαστάσεις του προβλήματος.

Άσκηση 10

Από 8 γάμους που έγιναν σε μια εκκλησία ενός χωριού κατά τη διάρκεια ενός μηνός , οι ηλικίες των ανδρόγυνων ήταν:

Ηλικία γαμπρού	**20**	**22**	**24**	**25**	**28**	**30**	**33**	**38**
Ηλικία νύφης	**20**	**20**	**22**	**27**	**24**	**25**	**28**	**34**

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ των ηλικιών της νύφης (Υ) και του γαμπρού (Χ) και να περιγράψετε το είδος της σχέσης που φαίνεται να έχουν οι δύο μεταβλητές.

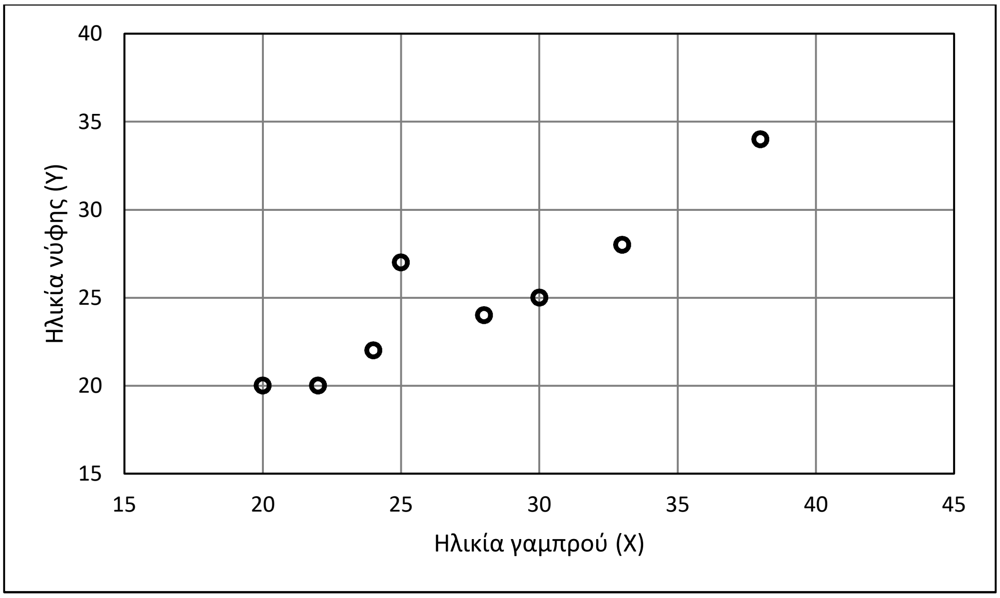
β) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των ηλικιών νύφης και γαμπρού.

γ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

δ) Να βρείτε την αναμενόμενη ηλικία της νύφης για έναν υποψήφιο γαμπρό ετών 34.

<u>Λύση</u>

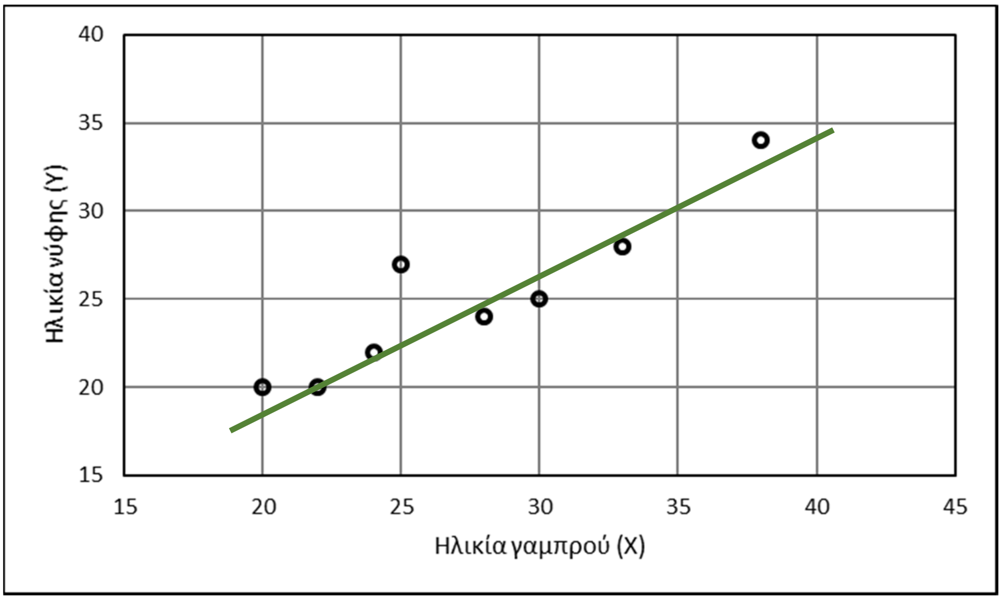
α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται παρακάτω:



Από το διάγραμμα φαίνεται να υπάρχει ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο ηλικιών.

β) Υπολογίζουμε ότι $r = 0,92$, τιμή που επιβεβαιώνει την ισχυρή γραμμική συσχέτιση της ηλικίας του γαμπρού με εκείνη της νύφης.

γ) Η ευθεία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



δ) Αξιοποιώντας την παραπάνω ευθεία μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι αν ο γαμπρός είναι 34 ετών, η αναμενόμενη ηλικία της νύφης είναι περίπου 31 ετών.

Άσκηση 11

Δίνεται δείγμα ν ζευγών παρατηρήσεων $\left(x_i, y_i\right), i = 1,2,\ldots,\nu$ δύο μεταβλητών X και Y και έστω r, ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y. Να αποδείξετε ότι αν όλα τα παραπάνω σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με εξίσωση:

$y_i = \alpha + \beta x_i,\ \ i = 1,2,\ldots,\nu$,

τότε:

$r = 1$ αν $\beta > 0$ και $r = -1$ αν $\beta < 0$.

Λύση

α) Εφόσον ισχύει ότι $y_i = \alpha + \beta x_i, i = 1,2,\ldots,\nu$, σύμφωνα με την εφαρμογή 3 της §2.3 θα είναι $\overline{y} = \alpha + \beta\overline{x}$ και $s_y = |\beta| \cdot s_x$

Οπότε έχουμε:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \nu\overline{x}\,\overline{y}}{\nu s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i(\alpha + \beta x_i) - \nu\overline{x}(\alpha + \beta\overline{x})}{\nu s_X |\beta| s_X} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha x_i + \sum_{i=1}^{\nu} \beta x_i^2 - \nu\alpha\overline{x} - \nu\beta\overline{x}^2}{\nu|\beta| s_X^2}$$

Επειδή $\nu\alpha\overline{x} = \nu\alpha\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu}\alpha x_i$, έχουμε:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}\beta x_i^2 - \nu\beta\bar{x}^2}{\nu|\beta|s_X^2} = \frac{\beta}{|\beta|}\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \nu\bar{x}^2}{\nu s_X^2} \quad (1)$$

Αποδεικνύεται ότι $s_X^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right)$, οπότε είναι $\nu s_X^2 = \sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2$

Επιπλέον, $\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \nu\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \nu\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \nu\frac{1}{\nu^2}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2$

Με βάση αυτά η (1) γίνεται $r = \frac{\beta}{|\beta|}\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2 - \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2} = \frac{\beta}{|\beta|}$.

Οπότε, αν $\beta > 0$ θα είναι $r = \frac{\beta}{\beta} = 1$,

ενώ αν $\beta < 0$ θα είναι $r = \frac{\beta}{-\beta} = -1$

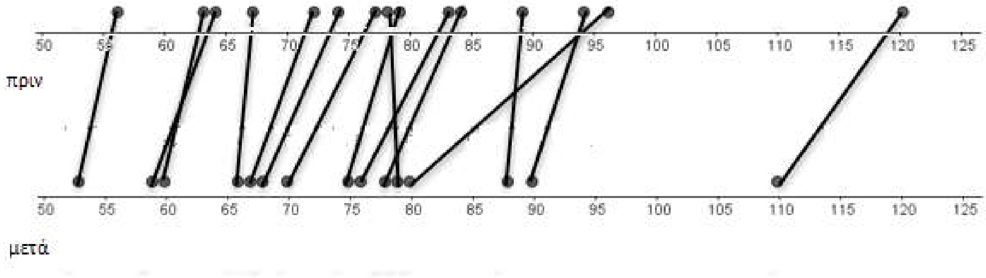
Πρόσθετο Υλικό – θέματα για διερεύνηση

1) Σε μια έρευνα που έγινε με σκοπό να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα μιας δίαιτας, μετρήθηκε το βάρος 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Πριν	**89**	**83**	**78**	**56**	**96**	**120**	**67**	**63**	**72**	**74**	**79**	**94**	**84**	**64**	**77**
Μετά	**88**	**76**	**79**	**53**	**80**	**110**	**66**	**60**	**67**	**67**	**75**	**90**	**78**	**59**	**70**

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της μεταβλητής του βάρους των 15 ατόμων πριν ($X_{πριν}$) και μετά ($X_{μετά}$) τη δίαιτα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.
β) Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για τη μεταβλητή του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα. Να τα συγκρίνετε και να διατυπώσετε την άποψή σας για το αν υπάρχει διαφορά πριν και μετά και τη δίαιτα.
γ) Δίνονται τα επόμενα σημειογράμματα για τη μεταβλητή του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα, στα οποία έχουν ενωθεί τα βάρη των 15 ατόμων πριν και μετά τη

δίαιτα. Τι παρατηρείτε από το γράφημα; Επιβεβαιώνεται η παρατήρησή σας, συγκρίνοντας με τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων;



δ) Να δημιουργήσετε τη μεταβλητή $Z = X_{πριν} - X_{μετά}$ για κάθε άτομο και να κατασκευάσετε το θηκόγραμμά της. Πώς μπορείτε να αναδείξετε τη διαφορά των τιμών του βάρους των 15 ατόμων πριν και μετά τη δίαιτα από αυτό το θηκόγραμμα;

ε) Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα διασποράς ανάμεσα στις μεταβλητές του βάρους ($X_{πριν}$) και ($X_{μετά}$) των 15 ατόμων.

στ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών του βάρους ($X_{πριν}$) και ($X_{μετά}$) των 15 ατόμων.

ζ) Να σχεδιάσετε «με το μάτι» την ευθεία που φαίνεται να προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

η) Θα μπορούσατε να εκτιμήσετε το βάρος ενός ατόμου που πρόκειται να ακολουθήσει αυτή τη δίαιτα, εάν το αρχικό του βάρος ήταν 91 κιλά;

Λύση

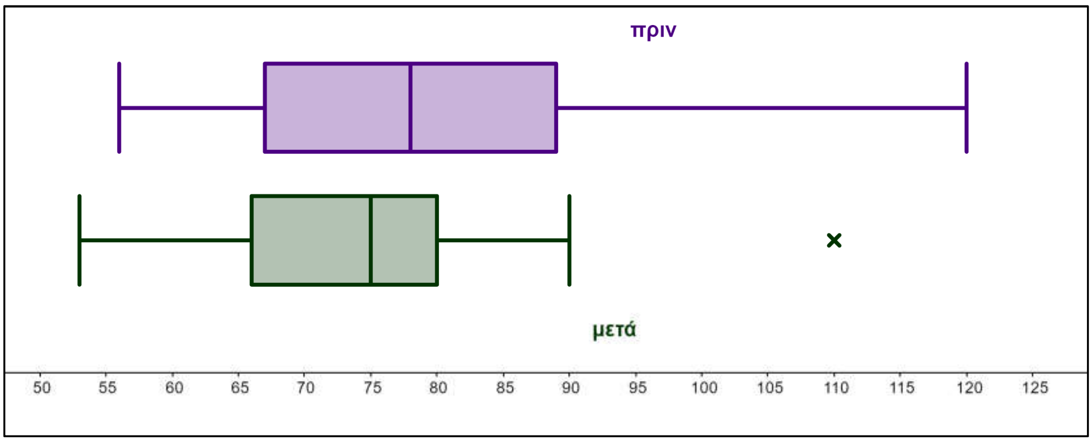
α) Με χρήση λογιστικού φύλλου βρίσκουμε

$\bar{X}_{πριν} = 79{,}7, \quad s_{πριν} = 15{,}4$ και

$\bar{X}_{μετά} = 74{,}5, \quad s_{μετά} = 13{,}8$

Κάποιος σχολιασμός θα μπορούσε να συνδέεται με τη μείωση του βάρους, αλλά πιθανόν και με τη μείωση της διασποράς.

β) Τα θηκογράμματα φαίνονται παρακάτω:



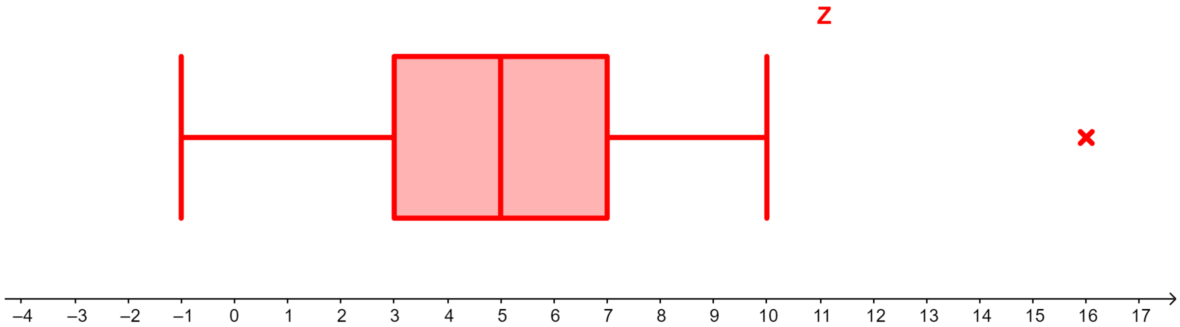
Φαίνεται να υπάρχει διαφορά μετά τη δίαιτα, ο αναγνώστης καλείται να την σχολιάσει.

γ) Ο σχολιασμός αφήνεται στον αναγνώστη.

δ) Η μεταβλητή Z φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Z = X_{\pi\rho\iota\nu} - X_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$	**1**	**7**	**-1**	**3**	**16**	**10**	**1**	**3**	**5**	**7**	**4**	**4**	**6**	**5**	**7**

και το αντίστοιχο θηκόγραμμα:



Ο σχολιασμός αφήνεται στον αναγνώστη

ε), στ), ζ) και **η)** Δίνεται το διάγραμμα διασποράς και ότι ο συντελεστής Pearson είναι $r = 0,97$. Η γραμμή, ο σχολιασμός και η εκτίμηση αφήνονται στον αναγνώστη.